

УДК 533.9

DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2026.3.12>

Оригинальная статья / Original paper

Эффекты профилирования параметров плазмы в задаче определения критерия тройного произведения для реакторов-токамаков на основе D-³He-топлива

В.В. Вертеровская, А.И. Годес, В.Л. Шаблов

ИАТЭ НИЯУ МИФИ,

249039 Россия, Калужская обл., г. Обнинск, Студгородок, д. 1

Реферат. Статья посвящена практическому применению разработанного комплекса расчетно-теоретических методов моделирования процессов в плазме реакторов-токамаков на основе D-³He-топлива в различных режимах его использования. Данный комплекс основан на современных данных по скоростям термоядерных реакций, рассчитываемых с использованием приближения эффективного радиуса, и корректном описании вкладов в энергетический баланс плазмы радиационных потерь. На предыдущем этапе исследований использовалась традиционная модель изотермической плазмы постоянной плотности (МИППП), результаты применения которой к определению критерия Лоусона и тройного произведения по-прежнему приводятся в литературе. В статье для определения критерия тройного произведения разработан аналитический метод учета эффектов профилирования параметров D-³He-плазмы, для которого результаты МИППП служат опорными параметрами. В основе этого метода лежит тот факт, что скорости реакций $D + D \rightarrow p + T$ и $D + D \rightarrow n + {}^3\text{He}$, через которые можно выразить энерговклад реакций синтеза в уравнение энергетического баланса, практически линейно зависят от энергии в диапазоне температур 10–130 кэВ. Для описания вклада магнитотормозного излучения используется локальная модель Трубникова (ЛМТ). Как следствие, учет эффектов профилирования сводится к умножению отдельных членов в уравнении энергетического баланса в МИППП на соответствующие множители, зависящие только от параметров функций профиля плотности и температуры, поскольку в ЛМТ индукция магнитного поля предполагается постоянной.

Ключевые слова: управляемый термоядерный синтез, моделирование процессов в D-³He-плазме, профилирование параметров плазмы, тройное произведение.

Для цитирования: Вертеровская В.В., Годес А.И., Шаблов В.Л. Эффекты профилирования параметров плазмы в задаче определения критерия тройного произведения для реакторов-токамаков на основе D-³He-топлива. *Известия вузов. Ядерная энергетика*. 2026;3:168–181. DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2026.3.12>

Введение

Исследование характеристик термоядерных реакторов, использующих перспективное D-³He-топливо, рассматриваемое в качестве альтернативы традиционному D-T-топливу, является одним из направлений расчетно-теоретических исследований в области управляемого термоядерного синтеза. Как известно, это связано с особенностями D-³He-топлива – доминирующая, т.е. дающая основной вклад в энерговыделение в плазме реакция $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$ является безнейтронной. Тем не менее, небольшое количество нейтронов рождается в сопутствующей реакции $D + D \rightarrow n + {}^3\text{He}$, однако объемная мощность, выделяемая в нейтронах (при одинаковых конструкционных параметрах ТЯР и концентрации плазмы), будет существенно меньше, чем в случае D-T-топлива. Это означает, что возможный переход на D-³He-топливо позволит решить так называемую проблему первой стенки ТЯР, облучаемой интенсивным потоком нейтронов с энергией 14 МэВ. Кроме того, не возникает необходимости обращения с радиоактивным тритием. Однако у D-³He-топлива есть собственные недостатки, в частности, существенно более высокие температуры реализации и, как следствие, более высокие радиационные потери. Подробный сравнительный анализ D-T- и D-³He-топлив можно найти в работах [1–4]. В связи с этим возникает задача повышения точности предсказания характеристик малорадиоактивного D-³He-топливного цикла термоядерных реакторов с магнитным удержанием плазмы и определения путей повышения эффективности их функционирования с учетом особенностей D-³He-топлива, для решения которой необходимо располагать комплексом расчетно-теоретических подходов к моделированию кинетики протекающих в плазме процессов и детальному описанию энергетического баланса плазмы, основанных на современных данных по скоростям термоядерных реакций и корректном описании энергетических потерь на тормозное и магнитотормозное излучения. Вариант такого комплекса был разработан ранее в [4, 5]. В его основу легло приближение эффективного радиуса [4–6], результаты которого позволили рассчитать скорости основных термоядерных реакций, согласующиеся с экспериментальными данными по сечениям реакций из базы данных EXFOR [7] и расчетно-теоретическими данными из базы NACREII [8], которые на данный момент считаются наиболее корректными. Для описания потерь на тормозное излучение использовались аналитические параметризации из работы [9], учитывающие релятивистские поправки, а для описания магнитотормозного излучения – модель Трубникова [10] с учетом релятивистской поправки [11, 12]. На первом этапе разработанный комплекс был применен к исследованию двух вариантов полностью катализированной D-D-реакции, характеризующейся тем, что образующиеся вторичные топливные ионы полностью сгорают в плазме [2]. Первый из этих вариантов – цикл с самообеспечением D-³He-топливом, второй – цикл с эквимольным D-³He-топливом, характеризующийся (при отсутствии внешних по отношению к плазме примесей) наибольшим энерговыделением реакций синтеза. При этом использовалась традиционная модель изотермической плазмы постоянной плотности, в рамках которой были определены основные функциональные характеристики реакторов-токамаков при различных значениях аспектного отношения, коэффициента отражения магнитотормозного излучения и параметра β – отношения газокINETического давления плазмы к магнитному давлению. В результате проведенных исследований

был рассчитан целевой параметр ТЯР – тройное произведение $n_i T \tau_E$ (n_i – концентрация ионов плазмы, τ_E – время энергетического удержания плазмы). Была показана теоретическая возможность осуществления управляемого термоядерного синтеза в режиме зажигания, т.е. при коэффициенте усиления мощности $Q = \infty$, в реакторах небольших размеров при относительно невысоких температурах плазмы (порядка 40 кэВ), невысоких значениях магнитной индукции с обычно рассматриваемыми значениями коэффициентов отражения и параметра β . Более реалистические расчетные модели плазмы предполагают учет профильных эффектов при описании параметров плазмы (например, [2, 3, 13, 14]), что и является целью настоящей статьи. Как будет показано далее, результаты модели изотермической плазмы постоянной плотности (МИППП) станут опорными характеристиками в моделях с профилированием. Отметим также, что расчеты по МИППП до сих пор приводятся и уточняются в статьях по управляемому термоядерному синтезу. Примером такой статьи может служить фундаментальный обзор [3], в котором приводятся данные по критерию Лоусона и тройному произведению для D-T-, D-D- и D-³He-топлив, причем в двух последних случаях без учета магнитотормозного излучения, несмотря на приводимые высокие ожидаемые температуры реализации в режиме зажигания (критерий Лоусона для катализированного D-D-топлива и D-³He-топлива – 106 кэВ, тройное произведение для катализированного D-D-топлива – 52 кэВ, для D-³He топлива – 68 кэВ). В работе рассматриваются два режима использования D-³He-топлива – полностью катализированные D-D-циклы в режиме самообеспечения ³He и в режиме эквимольного D-³He-топлива (в отсутствие внешних примесей).

Приближенная аналитическая модель профилирования плотности и температуры в реакторах-токамаках с D-³He-топливом

Как известно, для определения критерия Лоусона и тройного произведения необходимо обратиться к локальному уравнению энергетического баланса, которое после учета профилей плотности и температуры плазмы принимает следующий вид:

$$\left(\left\langle P_f \left(f_c + \frac{1}{Q} \right) \right\rangle - \langle P_{br} \rangle - \langle P_s \rangle \right) \tau_E = \frac{3}{2} (\langle n_e T_e \rangle + \langle n_i T_i \rangle). \quad (1)$$

В (1) использованы следующие обозначения: P_f – объемная мощность реакций синтеза; f_c – доля P_f , выделяющаяся в плазме; P_{br} – объемная мощность тормозного излучения; P_s – объемная мощность синхротронного излучения. Температуры электронов и ионов предполагаются одинаковыми $T_e = T_i = T$ и измеряются в энергетических единицах. Средние значения в (1) вычисляются по полоидальному сечению:

$$\langle F \rangle_s = \frac{2}{a^2} \int_0^a F(r) r dr = 2 \int_0^1 F(\rho) \rho d\rho. \quad (2)$$

Функции профиля концентрации и температуры выбираются в традиционном виде парабол

$$n(\rho) = n_0 (1 - \rho^\beta)^{\sigma_n}, \quad T(\rho) = T_0 (1 - \rho^\beta)^{\sigma_T}, \quad (3)$$

где n_0 и T_0 – пиковые значения плотности электронов и температуры соответственно; β , σ_n и σ_T – положительные показатели, что позволяет, как отмечалось в работах [2, 3, 12], охватить широкий диапазон форм профилей. Наиболее распространенный случай отвечает величине $\beta = 2$, который и будет использоваться далее. Уравнение (1) позволяет определить температуру T_0 , при которой достигается минимум параметра удержания плазмы $n_0 \tau_E$, что в совокупности задает критерий Лоусона. Для определения критерия тройного произведения необходимо вычислить минимум выражения $n_0 T_0 \tau_E$. Концентрации ионов, необходимые для определения входящих в уравнение (1) величин, рассчитываются на основе модели кинетики плазмы, уравнения которой сформулированы в работах [2, 3, 6, 15]. Приведем одно из этих уравнений для концентрации ионов D-³He для полностью катализированной D-D-реакции

$$\frac{dn_{\text{He}}}{dt} = -\langle \sigma v \rangle_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} n_d n_{\text{He}} + 0.5 \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow n\text{He}} n_d^2 + \frac{dn_{\text{He_ext}}}{dt}, \quad (4)$$

где $dn_{\text{He_ext}}/dt$ описывает подпитку ³He из внешнего источника. Уравнение (4) в стационарном режиме в отсутствие подпитки определяет равновесную концентрацию ³He, что отвечает циклу функционирования ТЯР с самообеспечением ³He:

$$n_{\text{He}} = \gamma_{\text{He}} n_d = \frac{0.5 \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow n\text{He}}}{\langle \sigma v \rangle_{d\text{He} \rightarrow p\alpha}} n_d. \quad (5)$$

Тогда вклад реакции $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$ в объемную мощность термоядерного синтеза запишется в виде

$$P_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} = Q_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} \langle \sigma v \rangle_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} n_{\text{He}} n_d = Q_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} \langle \sigma v \rangle_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} \gamma_{\text{He}} n_d^2, \quad (6)$$

где $Q_{d\text{He} \rightarrow p\alpha}$ – энергетический выход реакции, или с учетом (5)

$$P_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} = 0.5 Q_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow n\text{He}} n_d^2. \quad (7)$$

Аналогичным образом можно представить вклад в объемную мощность синтеза реакции $D + T \rightarrow n + {}^4\text{He}$:

$$P_{dT \rightarrow n\alpha} \langle \sigma v \rangle_{dT \rightarrow n\alpha} = Q_{dT \rightarrow n\alpha} \langle \sigma v \rangle_{dT \rightarrow n\alpha} n_T n_d = Q_{dT \rightarrow n\alpha} \langle \sigma v \rangle_{dT \rightarrow n\alpha} \gamma_T n_d^2,$$

$$\gamma_T = \frac{0.5 \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow pT}}{\langle \sigma v \rangle_{dT \rightarrow n\alpha}} n_d \quad (8)$$

или

$$P_{dT \rightarrow n\alpha} = 0.5 Q_{dT \rightarrow n\alpha} \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow pT} n_d^2. \quad (9)$$

Таким образом, объемная мощность реакций синтеза будет выражена через скорости двух D-D-реакций, особенностью которых является почти линейная зависимость от энергии в температурном диапазоне 10 – 130 кэВ. Далее концентрацию дейтерия представим в виде

$$n_d = \alpha n_i = \alpha \xi(Z) n_e. \quad (10)$$

В (10) использовано следующее обозначение $\xi(x)$ – среднее значение величины x , так что $\xi(Z)$ есть средний заряд ионов. В случае режима с самообеспечением ^3He примем во внимание результаты МИППП, а именно тот факт, что в широком диапазоне температур основными ионами в плазме являются ионы дейтерия и ^3He . Концентрация ионов трития, определяемая формулой (8), в температурном диапазоне 20 – 100 кэВ на полтора-два порядка меньше концентрации дейтерия. То же самое, как показывают расчеты [4 – 6], относится к суммарным концентрациям протонов и α -частиц, определяемым из уравнения баланса ионов и условия положительности энергетического баланса плазмы. Конкретные значения $\xi(Z)$ и $\xi(Z^2)$ зависят от величины α , определенной формулой (10), которую можно рассматривать как управляющий параметр наряду с коэффициентом усиления мощности Q , аспектным отношением A , параметром β , коэффициентом отражения магнитотормозного излучения и величиной δ , задающей подпитку ^3He в соответствии с соотношением $n_{\text{He}} = \delta \gamma_{\text{He}} n_d$, так что режим самообеспечения ^3He отвечает значению $\delta = 1$. Результаты МИППП показывают, что в режиме самообеспечения ^3He при различных наборах управляющих параметров величины $\xi(Z)$ и $\xi(Z^2)$ можно приближенно считать постоянными в температурном диапазоне 20 – 80 кэВ, где верхнее значение определяется ожидаемыми значениями температур в тройном произведении в соответствии с результатами МИППП. Область температур ниже 20 кэВ даст малый вклад при учете эффектов профилирования вследствие малости в этой области профилируемых величин плазмы. То же самое (т.е. слабая зависимость $\xi(Z)$ и $\xi(Z^2)$) относится к режиму с подпиткой ^3He , обеспечивающему максимальную объемную мощность энерговыделения, т.е. при $n_d = n_{\text{He}}$ (в отсутствие внешних примесей), когда $\delta = (\gamma_{\text{He}})^{-1}$.

Проведенное обсуждение позволяет сформулировать приближенную аналитическую модель учета эффектов плотности и температуры в реакторах-токамаках на основе ^3He -топлива. С этой целью опишем процедуру профилирования для каждого члена в уравнении энергетического баланса.

1. Тепловой нагрев плазмы при условии равенства температур электронов и ионов задается следующим соотношением:

$$1.5 \langle (n_e + n_i) \rangle = 1.5 n_0 T_0 J(1, 1) + 1.5 n_0 T_0 \int_0^1 Z(T_0 x^{\sigma_T})^{-1} x^{\sigma_n + \sigma_T} dx. \quad (11)$$

В (11) использовано следующее обозначение, которое будет применяться в дальнейшем:

$$\langle n^{\mu} T^{\nu} \rangle = n_0^{\mu} T_0^{\nu} J(\mu, \nu) = n_0^{\mu} T_0^{\nu} \frac{1}{\mu \sigma_n + \nu \sigma_T + 1}. \quad (12)$$

Фигурирующий в (11) интеграл вычислим приближенно, используя следующие результаты МИППП: ожидаемый диапазон энергий 40 – 70 кэВ, а величина Z^{-1} слабо изменяется в диапазоне 20 – 100 кэВ, что позволяет приближенно заменить ее на характерное значение Z^{-1} , поскольку заметные отклонения от него при вычислении профилирующего интеграла лежат в области аргумента x , близкого к нулю, когда мала сама профилирующая функция $x^{\sigma_n + \sigma_T}$. Аналогичный прием будет использоваться далее для определения средних величин вида $\xi(f(Z))$. При этом, как выясняется, интересующее значение величины $1/Z$ будет близко к $1/Z(T_0)$, что иллюстрирует следующий численный пример. Рассмотрим реактор-токамак с параметрами $A = 1.5$, $r = 0.92$, $\beta = 1$, $Q = \infty$ [5 – 6]. Значения функции $1/Z(T)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость функции $1/Z(T)$ от температуры в МИППП

T , кэВ	20	30	40	50	60	70	80
$1/Z(T)$	0.819	0.877	0.898	0.908	0.913	0.916	0.918

Видно, что в диапазоне температур 20 – 100 кэВ величина $1/Z(T)$ слабо изменяется, о чем говорилось выше, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\sigma_n + \sigma_T} Z^{-1}(T_0 x^{\sigma_T}) dx &= \frac{1}{1 + \sigma_n + \sigma_T} Z^{-1}(T_0) + \frac{\sigma_T}{1 + \sigma_n + \sigma_T} T_0 \int_0^1 x^{\sigma_n + 2\sigma_T} \frac{Z'(T_0 x^{\sigma_T})}{Z^2(T_0 x^{\sigma_T})} dx = \\ &= \frac{1}{1 + \sigma_n + \sigma_T} Z^{-1}(T_0) + \frac{\sigma_T}{1 + \sigma_n + \sigma_T} \cdot \frac{1}{1 + \sigma_n + 2\sigma_T} \cdot \frac{T_0 Z'(T_0)}{Z^2(T_0)} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Если принять $T_0 = 40$ кэВ в соответствии с предсказаниями МИППП и параметры профилирования $\sigma_n = 0.5$ и $\sigma_T = 1$ из [2], то поправка к первому слагаемому составит около 2%. Ясно, что такой же прием можно использовать при вычислении других профилирующих интегралов в (1).

2. Объемная мощность реакций синтеза P_f .

С учетом формул (9) и (11) величина P_f в режиме самообеспечения ^3He представляется в виде

$$P_f = 0.5 \cdot \left((Q_{d\text{He} \rightarrow p\alpha} + Q_{dd \rightarrow n\text{He}}) \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow n\text{He}} + (Q_{dT \rightarrow n\alpha} + Q_{dd \rightarrow pT}) \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow pT} \right) \alpha^2 \xi(Z)^{-2} n^2. \quad (14)$$

Для величины $\xi(Z)^{-2}$ в (14) далее будем использовать характерное значение, предсказываемое МИППП в диапазоне энергий 20 – 80 кэВ, о чем уже говорилось выше.

Принимая во внимание упомянутую ранее почти линейную зависимость скоростей обеих D-D-реакций от энергии, запишем эти скорости при $T > T_{1n} = 10$ кэВ в виде

$$\begin{aligned}\langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow nHe} &= \sigma_{0n} + C_n(T - T_{1n}), \quad \sigma_{0n} = \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow nHe}(T_{1n}) = 6.0 \cdot 10^{-19} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}, \\ C_n &= 3.0 \cdot 10^{-19} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1} \text{ кэВ}^{-1}.\end{aligned}\quad (15)$$

Ниже температуры T_{1n} применима параметризация из работы [16]:

$$\langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow nHe} = \sigma_{0n} \left(\frac{T_{1n}}{T} \right)^{2/3} \exp \left(-3 \left(\frac{B^2}{4T} \right)^{1/3} \right) \exp \left(3 \left(\frac{B^2}{4T_{1n}} \right)^{1/3} \right), \quad T \leq T_{1n}, \quad (16)$$

где B – параметр Гамова. Аналогичные соотношения записываются для $\langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow pT}$ с $\sigma_{0p} = \langle \sigma v \rangle_{dd \rightarrow pT}(T_{1n}) = 5.8 \cdot 10^{-19} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ и $C_p = 2.6 \cdot 10^{-19} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1} \text{ кэВ}^{-1}$. Отклонения величин линеаризованных параметризаций скоростей от данных, рассчитанных на основе приближения эффективного радиуса [4–6] и NACREII [8], не превышают 5%. Тогда вклад области температур $T > T_{1n}$ в усредненное по объему значение величины $n^2 \sigma_n$ будет равен

$$\langle n^2 \sigma_n \rangle = Z^{-2} n_0^2 \left(J(2,0) (\sigma_{0n} - C_n T_{1n}) \left(1 - \left(\frac{T_{1n}}{T_0} \right)^{2\sigma_n + 1/\sigma_T} \right) + J(2,1) C_n T_0 \left(1 - \left(\frac{T_{1n}}{T_0} \right)^{(2\sigma_n + \sigma_T + 1)/\sigma_T} \right) \right). \quad (17)$$

Вклад области температур $T \leq T_{1n}$ будет пренебрежимо мал, что уже отмечалось ранее. Таким образом, в режиме самообеспечения ${}^3\text{He}$

$$\left\langle \left(f_c + \frac{1}{Q} \right) P_f \right\rangle = 0.5 \left(f_c + \frac{1}{Q} \right) a^2 \left((Q_{dHe \rightarrow pa} + Q_{dd \rightarrow nHe}) \langle n^2 \sigma_n \rangle + (Q_{dT \rightarrow na} + Q_{dd \rightarrow pT}) \langle n^2 \sigma_p \rangle \right). \quad (18)$$

3. Вклад объемной мощности магнитотормозного излучения.

Локальная модель Трубникова (ЛМТ) дает для объемной мощности магнитотормозного излучения следующий результат [10, 12]:

$$P_s(\rho) = C(1-r)^{1/2} n(\rho)^{1/2} T(\rho)^0 B^{5/2} F(T) G(A, T). \quad (19)$$

Постоянная C и параметр r зависят от выбора форм-фактора Φ плазменного сгустка [10], в частности, для $\Phi_{3/2} \theta = 5/2$, а для $\Phi_{7/4} \theta = 11/4$. $F(T)$ – релятивистская поправка в виде отношения двух функций Макдональда, которую, как видно из ее графика, приведенного в [4], можно считать линейной функцией температуры $F(T) \approx 1 + 0.005T$. Функция $G(A, T) = (1 + 18/A \cdot T^{0.5})^{0.5}$ учитывает тороидальные эффекты геометрии плазмы, однако ЛМТ не учитывает возможные эффекты профиля индукции магнитного поля. Профилирование дает следующий результат:

$$\begin{aligned}P_s &= C(1-r)^{1/2} n_0^{1/2} T_0^0 B^{5/2} J(T) = P_{s0} J(T), \\ J(T) &= \frac{2}{\sigma_T} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1 + 0.005 T_0 x^2) (x + x_0)^{1/2} dx, \quad \alpha = \frac{1}{\sigma_T} (\sigma_n + 2) + 2\theta - \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{18}{A \sqrt{T_0}}.\end{aligned}\quad (20)$$

Интеграл, задающий $J(T)$, можно оценить приближенно, учитывая, что $\alpha > 4.5$, а потому основной вклад в интеграл в (20) даст окрестность точки $x = 1$, тогда

$$J(T) = \frac{2}{\sigma_T} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 2} (1 + 0.005T_0) \right) (1 + x_0)^{-1/2}. \quad (21)$$

Этот результат отличается от результата работы [12], в которой функция $G(A, T)$ не участвовала в профилировании:

$$J_1(T) = \frac{1}{1 + \theta\sigma_T + 0.5\sigma_n} (1 + x_0)^{1/2} \quad (22)$$

без учета $F(T)$, но при этом сохранился фактор, учитывающий тороидальный эффект. Профилирование с учетом $G(A, T)$, но без $F(T)$, как показывает формула (21), дает несколько отличный результат:

$$J(T) = \frac{1}{1 + (\theta - 0.25)\sigma_T + 0.5\sigma_n} (1 + x_0)^{1/2}. \quad (23)$$

Отметим также, что в ожидаемой области температур $T_0 \sim 40 - 60$ кэВ релятивистская поправка будет составлять около 20% по отношению к основному слагаемому в профилирующем множителе $J(T)$, задаваемом формулой (21).

4. Вклад тормозного излучения.

Для определения средней объемной мощности тормозного излучения будем использовать параметризацию из работы [9]. Соответствующее выражение с учетом числовых множителей имеет вид

$$P_{br} = 3.35 \cdot 10^{-15} n^2 T^{1/2} Z_{eff} (1 + 1.78t^{1.34}) + 1.60 \cdot 10^{-13} n^2 t^{3/2} (1 + 1.1t + t^2 - 1.25t^{5/2}), \quad (24)$$

где $t = T/511$, а Z_{eff} – эффективный заряд $\xi(Z^2)/\xi(Z)$. Результат профилирования выражения (23) легко выписывается с помощью формулы (12). При этом обсуждение, проведенное в п. 1, позволяет подставить Z_{eff} в виде $Z_{eff}(T_0)$.

Заключение

Тройное произведение для различных вариантов профилей плотности и температуры D-³He-плазмы

Разработанная приближенная аналитическая модель учета профилей плотности и температуры D-³He-плазмы позволяет непосредственно оценить вклады различных слагаемых в уравнение энергетического баланса, изменение этих вкладов по сравнению с МИПП и влияние профилирующих параметров на соотношение этих вкладов. Будут рассматриваться три набора параметров σ_n и σ_T :

$$\sigma_n = 0.5 \quad \sigma_T = 1.0 [2]; \quad \sigma_n = 0.1 \quad \sigma_T = 1.5 [12]; \quad \sigma_n = 0.5 \quad \sigma_T = 0.25 \quad [18].$$

Отметим, что параметры [2] близки или совпадают с отношениями $T_0 / \langle T \rangle = 1 + \sigma_T$ и $n_0 / \langle n \rangle = 1 + \sigma_n$, приведенными в [3] для реальных установок (токамаков и сферических токамаков). Как видно из формулы (16), в случае вклада реакций синтеза в энергетический баланс плазмы при $T > 30$ кэВ эффекты профилирования будут в основном определяться коэффициентом $J(2, 1)$, равным $1/3$ в случае параметров из [2], $1/2.7$ в случае параметров из [12] и $1/2.25$ в случае параметров из [18]. Приведем также значения изменения вклада в энергетический баланс величины $\langle (n_e + n_i)T \rangle$, необходимой для определения тройного произведения, по сравнению с МИППП:

$$\eta_n \cong \frac{1}{1 + \sigma_n + \sigma_T} \quad (25)$$

или $1/2.5$ [2], $1/2.6$ [12] и $1/1.75$ [18]. Одним из результатов развитого подхода является предсказание изменения вклада магнитотормозного излучения в энергетический баланс плазмы по сравнению с изотермической плазмой постоянной плотности. Величина, определяющая соответствующее изменение при $\theta = 11/4$, равна

$$\eta_s = \frac{1}{1 + (\theta - 0.25)\sigma_T + 0.5\sigma_n} \quad (26)$$

или $1/3.75$ [2], $1/4.8$ [12] и $1/1.875$ [18]. Видно, что этот вклад заметно уменьшается по сравнению с вкладом реакций синтеза в первых двух случаях и несколько меньше для плоских профилей из [16]. Этот результат хорошо известен: для уменьшения радиационных потерь на магнитотормозное излучение желательны более крутые профили плотности и температуры, однако увеличение показателей профилирования может привести к увеличению величины T_0 [14], что повлияет на тройное произведение. Последнее является следствием уравнения энергетического баланса и задается следующим соотношением [3]:

$$n_0 T_0 \tau_E = \frac{1.5(1 + Z(T_0)^{-1})T_0 J(1, 1)}{(f_c + 1/Q)A_f - A_{br} - A_s}, \quad (27)$$

где $A_k = \langle P_k \rangle n_0^{-2}$, а индекс k принимает значения f, br, s . Тройное произведение часто записывается через концентрацию ионов n_{i0} , т.е. в виде $n_{i0} T_0 \tau_E$ [3], переход к которому в (27) достигается делением правой и левой части на средний заряд ионов. Результаты расчетов с параметрами профилирования из [2] приведены в табл. 2. Величина P_n есть объемная мощность, уносимая нейтронами. Последняя строка (диапазон температур) определяет область, в которой выполняется условие положительности энергетического баланса плазмы. Во всех случаях концентрация электронов n_0 принята равной 10^{14} см^{-3} .

Из приведенных данных непосредственно виден ожидаемый результат – близость расчетных характеристик ТЯР на основе D-³He-топлива в моделях изотермической плазмы постоянной плотности [5, 6] и с профилированием плотности и температуры плазмы, являющийся следствием относительной близости соотношений вкладов

Таблица 2

Характеристики реакторов-токамаков на основе D-³He-топлива при $Q = \infty$

Основные параметры	1	2	3	4
β	0.5	1	0.5	1
a , м	2	2	3	2
R , м	3	3	4.5	3
r	0.65	0.92	0.65	0.92
B , Тл	2.40	1.79	2.43	1.78
δ	1	1	8.720	9.330
n_D/n_i	0.859	0.881	0.47	0.48
n_{He}/n_i	0.117	0.106	0.47	0.48
P_n , 10^{-3} , Вт/см ⁻³	13.25	17.39	0.82	0.98
T_0 , кэВ	38	42	44	47
$n_{i0} T_0 \tau_E$, см ⁻³ ·кэВ·с	$2.20 \cdot 10^{17}$	$1.51 \cdot 10^{17}$	$1.72 \cdot 10^{17}$	$1.06 \cdot 10^{17}$
Диапазон температур, кэВ	24 – 67	22 – 108	28 – 73	25 – 115

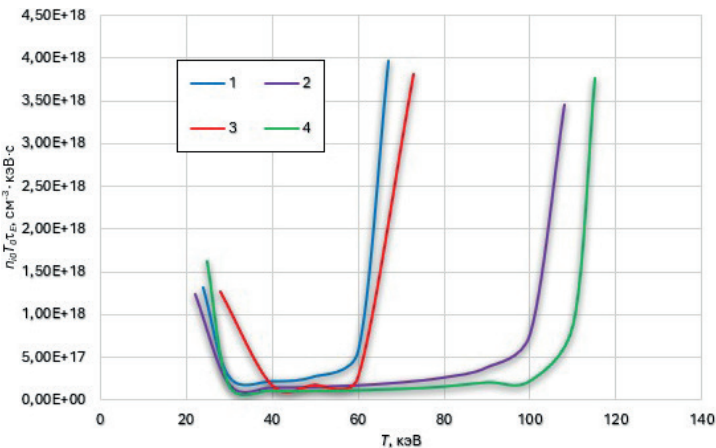


Рис. 1. Тройное произведение при различных режимах работы реакторов-токамаков, задаваемых параметрами из табл. 2

в энергетический баланс ТЯР, задаваемых коэффициентами профилирования теплового нагрева плазмы и реакций синтеза и радиационных потерь. Отметим также, что полученные результаты (температуры и порядки величины тройного произведения) в целом согласуются с результатами, приведенными в работах [3, 18].

Финансирование

Исследование выполнено за счет средств Российского научного фонда (грант 25-22-20058).

Литература

1. Рыжков С.В., Чирков А.Ю. Системы альтернативной термоядерной энергетики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017, 200 с.

2. Stott P.E. The feasibility of using $d - {}^3\text{He}$ and $d - d$ fusion fuels. *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2005;47:1305–1338. DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/47/8/011>
3. Wurzel S.E., C. Hsu S.C. Progress toward fusion energy breakeven and gain as measured against the Lawson criterion. *Phys. Plasmas*. 2022;29:062103. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0083990>
4. Годес А.И., Кондрашов О.В., Федоров Д.В., Шаблов В.Л. Разработка комплекса программных средств на основе приближения эффективного радиуса для моделирования кинетики процессов в перспективных термоядерных реакторах с D- ${}^3\text{He}$ -топливом. *Известия вузов. Ядерная энергетика*. 2025;4:6–18. DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2025.4.01>
5. Godes A.I., Fedorov D.V., Kondrashov O.V., Shablov V.L. Development of a set of software tools based on the effective radius approximation for simulating the kinetics of processes in the advanced thermonuclear reactors with D- ${}^3\text{He}$ fuel. *Nuclear Energy and Technology*. 2026;12(1):63–68. DOI: <https://doi.org/10.3897/nucet.12.191457>
6. Годес А.И., Шаблов В.Л. Критерий Лоусона для различных сценариев использования D- ${}^3\text{He}$ -топлива в термоядерных реакторах. *Известия вузов. Ядерная энергетика*. 2023;2:134–147. DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2023.2.11>
7. Zarkin V.V., Pritychenko B. The experimental nuclear reaction data (EXFOR): Extended computer database and Web retrieval system. *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A*. 2018;888:31–43. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2018.01.045>
8. Xu Y., Takahashi K., Goriely S., Arnould M., Ohta M., Utsunomiya H. NACRE II: an update of the NACRE compilation of charged-particle-induced thermonuclear reaction rates for nuclei with mass number $A < 16$. *Nuclear Physics A*. 2013;918:61–169. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2013.09.007>
9. Putvinski S.V., Ryutov D.D., Yushmanov P.N. Fusion reactivity of the pB11 plasma revisited. *Nucl. Fusion*. 2019;59:076018. DOI: <https://doi.org/10.1088/1741-4326/ab1a60>
10. Трубников Б.А. Универсальный коэффициент выхода циклотронного излучения из плазменных конфигураций. Вопросы теории плазмы. Выпуск 7. М.: Атомиздат, 1973, с. 274–300.
11. Роуз Д., Кларк М. Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции. М.: Госатомиздат, 1963, 487 с.
12. Albajar F., Bornatici M., Engelmann F. RAYTEC: a new code for electron cyclotron radiative transport modelling of fusion plasmas. *Nucl. Fusion*. 2009;49(11):115017. DOI: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/49/11/115017>
13. Чирков А.Ю. О возможной концепции токамака-реактора с альтернативным термоядерным топливом D- ${}^3\text{He}$. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез*. 2000;4:37–43.
14. Готт Ю.В., Юрченко Н.И. Влияние пространственного распределения параметров плазмы на работу термоядерного реактора. *Журнал технической физики*. 2022;22(12):1794–1802. DOI: <https://doi.org/10.21883/JTF.2022.12.53746.135-22>
15. Khvesyuk V.I., Chirkov A.Yu. Low radioactivity D- ${}^3\text{He}$ fusion fuel cycles with ${}^3\text{He}$ production. *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002;44(2):253. DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/44/2/308>
16. Peres A. Fusion cross sections and thermonuclear reaction rates. *Journ. Appl. Phys.* 1979;50:5569; <https://doi.org/10.1063/1.326748>
17. Wesson J. Tokamaks. Oxford, 2004, 749 p.
18. Чирков А.Ю. О возможности использования D- ${}^3\text{He}$ с наработкой ${}^3\text{He}$ в термоядерном реакторе на основе сферического токамака. *Журнал технической физики*. 2006;76(9):51–54.

Поступила в редакцию 18.07.2026

После доработки 21.08.2026

Принята к опубликованию 10.09.2026

АвторыВертеровская Вероника Валентиновна, бакалавр 4-го года обучения отделения ядерной физики и технологий,

E-mail: ver.verterovskaya@gmail.com

Годес Александр Игоревич, старший преподаватель кафедры общей и специальной физики,

E-mail: godes.ai@yandex.ru

Шаблов Владимир Леонидович, профессор отделения ядерной физики и технологий, д.ф.-м.н.,

E-mail: shablov.vl@yandex.ru

UDC 533.9

Effects of Plasma Parameter Profiling on the Triple Product Criterion Determination for D-³He Tokamak Reactors**Verterovskaya V.V., Godes A.I., Shablov V.L.***OINPE MPhI,**1 Studgorodok, 249039 Obninsk, Kaluga reg., Russia***Abstract**

This article is dedicated to the practical application of a developed set of computational and theoretical methods for modeling processes in tokamak reactor plasmas based on D-³He fuel in various operational modes. This set of methods is based on up-to-date data on thermal reactivities, calculated using the effective radius approximation, which are in good agreement with data from the NACRE II database in the range of 5 – 130 keV. It also includes a correct description of the contributions of radiative losses to the plasma energy balance, taking into account relativistic effects. In the previous stage of research, a traditional model of isothermal plasma with constant density was used, the results of which for determining the Lawson criterion and the fusion triple product are still cited in the literature. In this article, an analytical method for accounting for the effects of profiling D-³He plasma parameters has been developed, for which the results of the isothermal plasma model of constant density serve as reference parameters. The basis of this method is the fact that the reaction rates of $D + D \rightarrow p + T$ and $D + D \rightarrow n + {}^3\text{He}$, through which the energy contribution of fusion reactions can be expressed in the energy balance equation, depend almost linearly on energy in the range of 10 – 130 keV. The local Trubnikov model is used to describe the contribution of synchrotron radiation. Consequently, accounting for profiling effects reduces to multiplying individual terms in the energy balance equation of the isothermal plasma model of constant density by corresponding multipliers that depend only on the parameters of the density and temperature profile functions, since in the local Trubnikov model, the magnetic field induction is assumed to be constant.

Keywords: controlled thermonuclear fusion, modeling of processes in D-³He plasma, plasma parameter profiling, triple product.

Funding. The research was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 25-22-20058).

For citation: Verterovskaya V.V., Godes A.I., Shablov V.L. Effects of Plasma Parameter Profiling on the Triple Product Criterion Determination for D-³He Tokamak Reactors. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*. 2026;3:168–181. DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2026.3.12> (in Russian).

References

1. Ryzhkov S.V., Chirkov A.Yu. Systems of alternative thermonuclear energy. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017, 200 p. (in Russian).
2. Stott P.E. The feasibility of using d – ³He and d – d fusion fuels. *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2005;47:1305–1338. DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/47/8/011>
3. Wurzel S.E., C. Hsu S.C. Progress toward fusion energy breakeven and gain as measured against the Lawson criterion. *Phys. Plasmas*. 2022;29:062103. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0083990>
4. Godes A.I., Kondrashov O.V., Fedorov D.V., Shablov V.L. Development of a Set of Software Tools Based on the Effective Radius Approximation for Simulating the Kinetics of Processes in the Advanced Thermonuclear Reactors with D- ³He Fuel. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*. 2025;4:6–18. DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2025.4.01> (in Russian).
5. Godes A.I., Fedorov D.V., Kondrashov O.V., Shablov V.L. Development of a set of software tools based on the effective radius approximation for simulating the kinetics of processes in the advanced thermonuclear reactors with D-³He fuel. *Nuclear Energy and Technology*. 2026;12(1):63–68. DOI: <https://doi.org/10.3897/nucet.12.191457>
6. Godes A.I., Shablov V.L. Lawson criterion for various scenarios of D-³He fuel use in thermonuclear reactors. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*. 2023;2:134–147. DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2023.2.11> (in Russian).
7. Zerkov V.V., Pritychenko B. The experimental nuclear reaction data (EXFOR): Extended computer database and Web retrieval system. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A*, 2018;888:31–43. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2018.01.045>
8. Xu Y., Takahashi K., Goriely S., Arnould M., Ohta M., Utsunomiya H. NACRE II: an update of the NACRE compilation of charged-particle-induced thermonuclear reaction rates for nuclei with mass number A < 16. *Nuclear Physics A*. 2013;918:61–169, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2013.09.007>
9. Putvinski S.V., Ryutov D.D., Yushmanov P.N. Fusion reactivity of the pB11 plasma revisited. *Nucl. Fusion*. 2019;59:076018. DOI: <https://doi.org/10.1088/1741-4326/ab1a60>
10. Trubnikov B.A. Universal coefficient of cyclotron radiation output from plasma configurations. Questions of Plasma Theory. Issue 7. Moscow, Atomizdat Publ., 1973, pp. 274–300 (in Russian).
11. Rose D., Clark M. Plasmas and controlled fusion. Massachusetts Institute of Technology Press: John Wiley and sons: NewYork. London. 1961, 487 p.
12. Albajar F., Bornatici M., Engelmann F. RAYTEC: a new code for electron cyclotron radiative transport modelling of fusion plasmas. *Nucl. Fusion*. 2009;49,11:115017. DOI: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/49/11/115017>
13. Chirkov A.Yu. On a possible concept of a tokamak reactor with alternative D-³He thermonuclear fuel. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Thermonuclear Fusion*. 2000;4:37–43 (in Russian).
14. Gott Y.V., Yurchenko N.I. The influence of spatial distribution parameters of plasma on the operation of a thermonuclear reactor. *Journal of Technical Physics*. 2022;22(12):1794–1802. DOI: <https://doi.org/10.21883/JTF.2022.12.53746.135-22>

15. Khvesyuk V.I., Chirkov A.Yu. Low radioactivity D-³He fusion fuel cycles with ³He production. *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002;44(2):253. DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/44/2/308>
16. Peres A. Fusion cross sections and thermonuclear reaction rates. *Journal of Applied Physics*. 1979;50:5569. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.326748>.
17. Wesson J. Tokamaks. Oxford, 2004, 749 p.
18. Chirkov A.Yu. On the possibility of using D-³He with ³He breeding in a spherical tokamak-based thermonuclear reactor. *Journal of Technical Physics*. 2006;76(9):51–54 (in Russian).

Authors

Veronika V. Verterovskaya, 4nd year Bachelor, Department of Nuclear Physics and Technology,
E-mail: ver.verterovskaya@gmail.com

Aleksandr I. Godes, Senior Lecturer, Department of General and Special Physics,
E-mail: godes.ai@yandex.ru

Vladimir L. Shablov, Professor, Department of Nuclear Physics and Technology, Dr. Sci.
(Phys.-Math.),
E-mail: shablov.vl@yandex.ru