

# КРИТЕРИЙ ЛОУСОНА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЦЕНАРИЕВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ D-<sup>3</sup>He-ТОПЛИВА В ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ

**А.И. Годес, В.Л. Шаблов**

*ИАТЭ НИЯУ МИФИ*

*249039, Калужская обл., г. Обнинск, Студгородок, д. 1*



Работа посвящена уточнению критерия Лоусона для трех сценариев использования в термоядерных реакторах на основе D-<sup>3</sup>He-топлива (полностью катализированного и полностью некатализированного циклов и D-<sup>3</sup>He-цикла с самообеспечением <sup>3</sup>He). С этой целью разработана новая параметризация сечения и астрофизического фактора реакции синтеза  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$ , основанная на приближении эффективного радиуса (приближении Ландау-Сморозинского-Бете), которое является безмодельным теоретическим подходом к изучению околопороговых, в том числе резонансных, ядерных реакций. В рамках данного приближения описаны экспериментальные данные работ из библиотек NACRE II и EXFOR, результаты которых на сегодняшний день считаются наиболее надежными, в пределах заявленной в этих работах точности в диапазоне энергий 0 – 1000 кэВ и рассчитана температурная зависимость усредненной по максвелловскому распределению скорости реакции. Полученные результаты хорошо согласуются с расчетами, основанными на R-матричной теории, и данными по скорости реакции, приведенными в библиотеке NACRE II.

Для полностью катализированного цикла и цикла с самообеспечением <sup>3</sup>He критерий Лоусона и тройной критерий Лоусона рассчитаны на основе решения уравнений кинетики стационарного процесса в термоядерном реакторе для трех топливных ионов D, <sup>3</sup>He и T с учетом возможной подпитки <sup>3</sup>He и ионов примесей – p и <sup>4</sup>He, удаляемых из зоны реакции. Найденные параметры тройного критерия Лоусона для полностью катализированного D-D-цикла таковы:  $n\tau T = 6.42 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ}$  ( $T = 54 \text{ кэВ}$ ), тогда как для цикла с самообеспечением <sup>3</sup>He  $n\tau T = 1.03 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ}$  ( $T = 45 \text{ кэВ}$ ), а для некатализированного D-D-цикла с эквивалентным D-<sup>3</sup>He-топливом  $n\tau T = 4.89 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ}$  ( $T = 67 \text{ кэВ}$ ).

**Ключевые слова:** термоядерные реакции, приближение эффективного радиуса, сечение и астрофизический фактор термоядерной реакции  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$ , критерий Лоусона для различных сценариев использования D-<sup>3</sup>He-топлива.

Годес А.И., Шаблов В.Л. Критерий Лоусона для различных сценариев использования D-<sup>3</sup>He-топлива в термоядерных реакторах. // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2023. – № 2. – С. 134-147. DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2023.2.11> .

## ВВЕДЕНИЕ

Начиная с середины 50-х гг. XX в. цель исследований в области управляемого термоядерного синтеза (УТС) – достичь и превзойти критерий Лоусона [1 – 3], определяю-

© А.И. Годес, В.Л. Шаблов, 2023

щий условия получения самоподдерживающейся ядерной реакции. Для этого должны быть одновременно удовлетворены три условия:

- термоядерное горючее должно быть нагрето до таких температур, при которых кинетическая энергия ядер становится достаточной для их туннелирования через кулоновский барьер с заметной вероятностью;
- концентрация образовавшейся при нагревании плазмы должна быть достаточно высокой;
- температура и концентрация плазмы должны поддерживаться в течение определенного времени  $\tau$ , называемого временем удержания плазмы.

В простейшем варианте, когда не учитываются различные к.п.д. преобразования выделяющейся в термоядерном реакторе (ТЯР) энергии, частично или полностью затрачиваемой затем на нагревание и удержание плазмы, и пренебрегается потерями на излучение, критерий Лоусона имеет вид

$$n_e \tau \geq 12kT / (\langle \sigma v \rangle Q), \quad (1)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $\langle \sigma v \rangle$  – скорость реакции синтеза, значение которой принимается для изотермической плазмы, т.е. для температуры  $T$  (предполагается, что есть доминирующая реакция, как в случае дейтериево-тритиевой плазмы);  $Q$  – кинетическая энергия образовавшихся в результате реакции синтеза заряженных частиц. Несмотря на приближенный характер формулы (1), она носит универсальный характер (т.е. практически не зависит от конкретного вида термоядерной установки) и дает реперное значение для параметра удержания плазмы  $n_e \tau$ , достижение которого обеспечивает самоподдерживающуюся реакцию синтеза. Кроме того, формула (1) показывает ту важную роль, которую играет корректное задание величины  $\langle \sigma v \rangle$ . Изменение в скорости реакции даже на несколько процентов может заметно повлиять на параметры перспективных термоядерных установок, в частности, на параметр удержания плазмы. Критерий Лоусона как раз и определяет минимальную частоту реакций синтеза в секунду, необходимую для устойчивого поддержания реакции в материальной среде. И хотя в рассматриваемой ситуации эта величина отвечает усреднению сечения реакции по максвелловскому распределению с температурой  $T$  (а реальные процессы не обязательно описываются распределением Максвелла, как, например, в случае плазмы в сильном магнитном поле [4]), величина  $\langle \sigma v \rangle$  также является реперной для расчета реальных установок термоядерного синтеза, причем в этом случае необходимо знать скорости реакций в широком диапазоне температур. Укажем на другую область науки – астрофизические исследования, в которых также необходимо знание с хорошей точностью величин  $\langle \sigma v \rangle$ .

Целью работы является уточнение критерия Лоусона для термоядерных реакторов, работающих на D-<sup>3</sup>He-топливе, которое рассматривается как ближайший конкурент D-T-топливу. Основное преимущество D-<sup>3</sup>He-реактора по сравнению с D-T-реактором – низкий уровень нейтронного потока из плазмы, при котором срок службы первой стенки реактора может достигать 30 – 40 лет [5, 6]. Однако топливный D-<sup>3</sup>He-цикл характеризуется существенно более высокими значениями критерия Лоусона. Напомним, что по состоянию на конец 1950-х гг. критерий Лоусона для эквимолярного D-T-топлива был  $n_e \tau = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ , ( $T = 17 \text{ кэВ}$ ), для эквимолярного D-<sup>3</sup>He-топлива  $n_e \tau = 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ , ( $T = 87 \text{ кэВ}$ ) [7], тогда как более современные оценки таковы [8]: D-T-топливо –  $n_e \tau = 1.6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ , ( $T = 26 \text{ кэВ}$ ); D-<sup>3</sup>He-топливо –  $n_e \tau = 8.1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ , ( $T = 105 \text{ кэВ}$ ). Возникшие различия во многом связаны с уточнением температурной зависимости скоростей протекающих термоядерных реакций. В работе будут приведены результаты расчета температурной зависимости скорости реакции  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$  на основе параметризации ее астрофизического фактора в рамках приближения эффективного радиуса [9 – 12] и проведено сравнение с тремя наиболее широко используемыми пара-

метризациями величины  $\langle\sigma v\rangle$ . Будут рассмотрены три варианта топливного D- $^3\text{He}$ -цикла [6, 13]:

- полностью катализируемый D-D-цикл, в котором нарабатываемые тритий и  $^3\text{He}$  полностью используются как вторичное топливо;
- некатализируемый D-D-цикл, когда промежуточные  $^3\text{He}$  и T удаляются после того, как они отдают основную часть своей термоядерной кинетической энергии для нагрева плазмы, но до дальнейшего сжигания с дейтерием;
- режим самообеспечения  $^3\text{He}$ .

### **ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ АСТРОФИЗИЧЕСКОГО ФАКТОРА И ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ РЕАКЦИИ $\text{D} + ^3\text{He} \rightarrow \text{p} + ^4\text{He}$ В РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДАХ**

Начиная с 1950-х гг. было выполнено большое количество экспериментальных и теоретических работ по сечениям и скоростям термоядерного синтеза [14]. Для сечений и скоростей реакций были разработаны различные параметризации [15 – 20], отличия в которых связаны как с их методической основой, так и с тем обстоятельством, что они создавались в разное время и потому базировались на различающемся экспериментальном материале. Применительно к реакции  $\text{D} + ^3\text{He} \rightarrow \text{p} + ^4\text{He}$  разработанные параметризации, имеющие в низкоэнергетической области резонансный характер, можно разделить на две группы.

Первая группа. Параметризации, основанные на физических моделях и приближениях, в том числе

- R-матричная теория Вигнера, которая легла в основу параметризаций сечений и скоростей основных термоядерных реакций в работе [14];
- приближение Брейта-Вигнера, использовавшееся в работах [15 – 17];
- безмодельный подход – приближение эффективного радиуса (ПЭР) [11, 12];
- резонансная модель связанных каналов [18].

Достоинством этих параметризаций является их непосредственный физический смысл, правильное пороговое поведение, использование небольшого числа подгоночных параметров, возможность практического применения в других областях физики, например, в ядерной спектроскопии, недостатком – ограниченная область применимости.

Вторая группа. Параметризации, основанные на математических методах аппроксимации экспериментальных данных, в том числе

- паде-аппроксимация сечения и скорости реакции с правильным пороговым поведением [19], впоследствии использовавшаяся в [14];
- регуляризованный метод двойного периода [20], в котором с целью исключения нефизичных осцилляций аппроксимирующего тригонометрического ряда, вызванных большими ошибками экспериментальных точек, используется регуляризация стабилизатором А.Н. Тихонова.

Оба метода пригодны для решения специализированной задачи – определения температурной зависимости скорости реакции, но непригодны для других задач. Кроме того, метод двойного периода требует большого числа экспериментальных точек, что проблематично в случае интересующей нас реакции, так как в рассмотрение попадают работы с недостаточно проработанной методической основой (см. по этому поводу обсуждение в работах [14, 21 – 23]).

Результаты работы будут сравниваться с данными наиболее употребительных в настоящее время параметризаций [14, 15, 17] и NACRE II [24].

Параметризация NACRE II (Nuclear Astrophysics Compilation of Reactions) содержит данные о скоростях 34-х экзотермических реакций, вызванных заряженными частицами с массовым числом  $A < 16$ . В NACRE II скорости реакций представлены в табулиро-

ванном формате в диапазоне температур  $1 \cdot 10^6 \text{ K} \leq T \leq 1 \cdot 10^{10} \text{ K}$  и содержат экспериментальные данные до 2013 г. В таблицах приведены значения верхней, нижней и принятой оценок величины  $N_A \langle \sigma v \rangle$ . NACRE II основывается на расчетах сечений с помощью различных теоретических моделей (борновское приближение искаженных волн, приближение Брейта-Вигнера и т.д.).

Отметим, что в случае реакции  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$  предыдущая версия NACRE использует результаты работ [16, 17], основанных на приближении Брейта-Вигнера с постоянной шириной, хотя для околорогового термоядерного резонанса ядра  ${}^5\text{Li}^{**}$ , через который протекает эта реакция в низкоэнергетической области, более обоснованным был бы подход, использующий приближение с шириной, зависящей от энергии [25]. В NACRE II для описания резонансных реакций используется комбинация борновского приближения искаженных волн (для нерезонансной части амплитуды) и приближения Брейта-Вигнера (для резонансной части амплитуды) с учетом при необходимости зависимости ширины резонанса от энергии.

### ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ АСТРОФИЗИЧЕСКОГО ФАКТОРА И ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ РЕАКЦИИ $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$ НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА

Приближение эффективного радиуса (ПЭР) является безмодельным подходом и работает с экспериментально наблюдаемыми величинами – длиной рассеяния, эффективным радиусом и параметром формы потенциала.

Для низкоэнергетического рассеяния в системе двух заряженных частиц это приближение базируется на следующем выражении для элемента  $S$ -матрицы  $S_{11}(E)$  упругого рассеяния в  $s$ -волне:

$$S_{11}(E) = e^{2i\sigma_0(E)} \frac{\text{ctg}\delta_0(k) + i}{\text{ctg}\delta_0(k) - i}, \quad (2)$$

где  $\sigma_0(E) = \arg \Gamma(1 + i\eta)$  – кулоновская фаза рассеяния;  $\eta = \eta(k)$  – кулоновский параметр

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2 m_r}{\hbar^2 k} \quad (3)$$

или  $\eta = (ka_c)^{-1}$ ;  $a_c$  – борровский радиус для пары синтезирующихся ядер с приведенной массой  $m_r$

$$a_c = \hbar^2 / (Z_1 Z_2 e^2 m_r). \quad (4)$$

В рамках ПЭР ядерно-кулоновский сдвиг  $\delta_0(k)$  определяется соотношением

$$a_c^{-1} [D(k) \text{ctg}\delta_0(k) + 2h(k)] = -a_0^{-1} + 0.5r_0 k^2, \quad (5)$$

где  $a_0$  – длина рассеяния;  $r_0$  – эффективный радиус;  $D(k)$  – проникаемость кулоновского барьера

$$D(k) = 2\pi / (e^{2\pi\eta} - 1), \quad (6)$$

$$h(k) = \text{Re}\psi(i\eta) - \ln(\eta) = \text{Re}\psi(i/(ka_c)) + \ln(ka_c), \quad (7)$$

$\psi(z)$  – логарифмическая производная гамма-функции. Ядерно-кулоновский сдвиг при наличии поглощения становится комплексной величиной, а потому длина рассеяния и эффективный радиус также становятся комплексными [12].

Тогда имеет место равенство

$$\omega(k) = D(k) \text{ctg}\delta_0(k) - iD(k) = \varphi(k^2) - 2h(k) \quad (8)$$

с функцией  $\varphi(k^2)$  вида

$$\varphi(k^2) = -a_c/a_0 + 0.5r_0a_c k^2 = a_0 + a_1 k^2 - i(\beta_0 + \beta_1 a_c^2 k^2). \quad (9)$$

В общем случае в функции  $\varphi(k^2)$  можно учесть члены с  $k^4$  и  $k^6$ . В итоге сечение реакции равно

$$\sigma_r(E) = g(\pi/k^2)(1 - |S_{11}|^2), \quad (10)$$

где  $g$  – спиновый множитель  $(2J + 1)/[(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)]$ , который в случае реакции  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$  равен  $2/3$ , или

$$\sigma_r(E) = 8\pi\beta(k)D(k) / (3k^2|\omega(k)|^2). \quad (11)$$

Формулу (11) представим в виде

$$\sigma_r(E) = \frac{8\pi}{3k^2} \frac{\beta(k)D(k)}{(\alpha(k) - 2h(k))^2 + (\beta(k) + D(k))^2}, \quad (12)$$

$$\alpha(k) = \alpha_0 + \alpha_1(ka_c)^2 + \alpha_2(ka_c)^4, \quad \beta(k) = \beta_0 + \beta_1(ka_c)^2 + \beta_2(ka_c)^4.$$

Из (12) для астрофизического фактора  $S(E) = Ee^{2\pi\eta}\sigma_r(E)$  получается выражение

$$S(E) = \frac{8\pi^2\hbar^2}{3m_r(1 - e^{-2\pi\eta})} \frac{\beta(k)}{(\alpha(k) - 2h(k))^2 + (\beta(k) + D(k))^2} \quad (13)$$

или (с учетом числовых множителей)

$$S(E) = \frac{9.11}{(1 - e^{-2\pi\eta})} \frac{\beta(k)}{(\alpha(k) - 2h(k))^2 + (\beta(k) + D(k))^2} [\text{МэВ} \cdot \text{б}]. \quad (14)$$

Условие применимости ПЭР: параметр  $kR \leq 1$ , где  $R$  – радиус действия ядерных сил [9], в соответствии с [24] приближенно равный 1 Фм, так что при  $E \leq 1$  МэВ указанный параметр не превышает 0.25.

Кроме того, ПЭР неприменимо при  $E \leq 0.02$  кэВ, когда в сечениях ядерных реакций проявляются эффекты электронной экранировки кулоновского поля ядер (эффект «the laboratory electron screening» [24]).

Параметры ПЭР, с помощью которых рассчитан астрофизический фактор на рис. 1 и которые обеспечивают аппроксимацию считающихся на сегодня наиболее надежными экспериментальных данных из работ [21 – 23] с заявленной в них точностью, таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.117002, & \alpha_1 &= 0.191855, & \alpha_2 &= -0.01225, \\ \beta_0 &= 0.00937, & \beta_1 &= 0.006658, & \beta_2 &= 0.000582. \end{aligned} \quad (15)$$

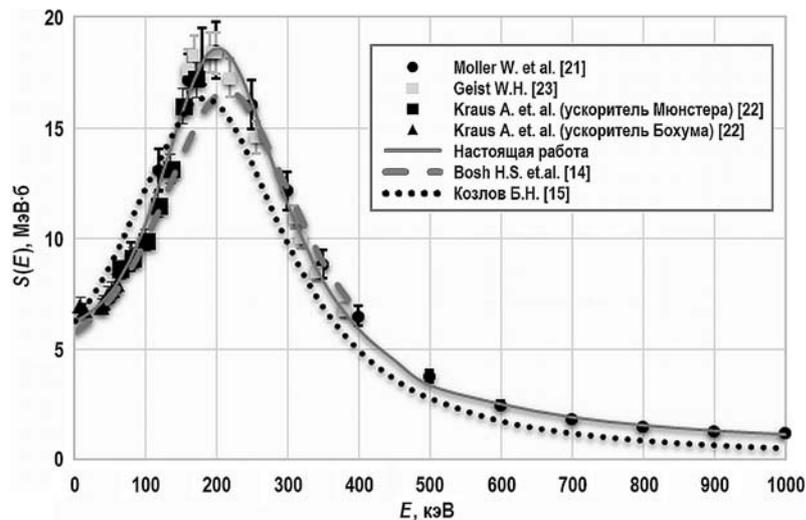


Рис 1. Астрофизический S-фактор реакции  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$

Приведенные параметры согласуются и с данными по упругому D-<sup>3</sup>He-рассеянию [26] (рис. 2).

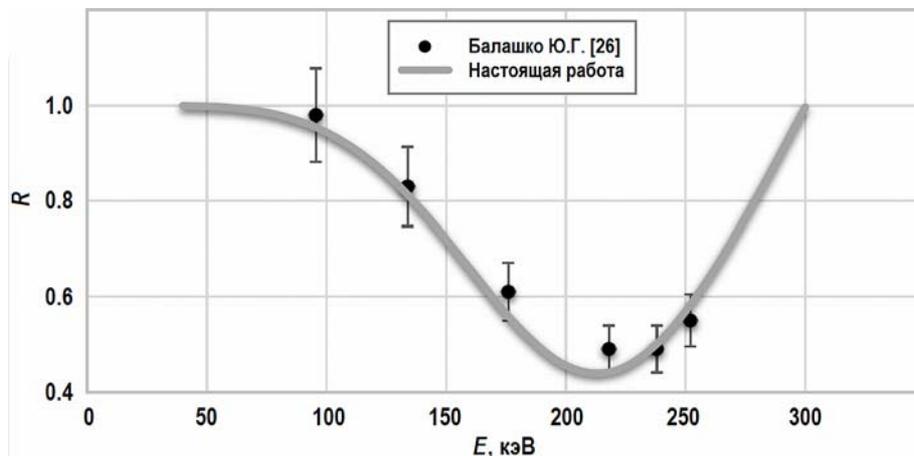


Рис. 2. Отношение сечения упругого D-<sup>3</sup>He-рассеяния к резерфордскому сечению при угле рассеяния 90° в системе центра масс

Другой набор параметров, основанный на экспериментальных данных работ [21, 22], был получен в [27]:

$$\alpha_0 = 0.05431, \quad \alpha_1 = 0.25077, \quad \alpha_2 = -0.02825,$$

$$\beta_0 = 0.00205, \quad \beta_1 = 0.00707, \quad \beta_2 = 0.00169.$$

Описание упругого рассеяния в этом случае несколько хуже, и здесь не приводится.

Скорость реакции термоядерного синтеза определяется как

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^{\infty} v \sigma(E) F(E) dE, \quad (16)$$

где  $F(E)$  – функция распределения Максвелла по энергии:

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-E/(kT)}. \quad (17)$$

Результаты расчета температурной зависимости скорости изучаемой реакции показаны на рис. 3.

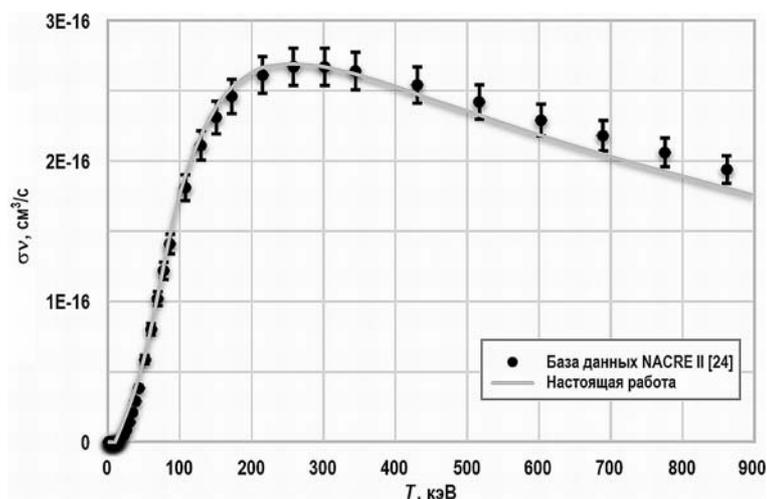


Рис. 3. Зависимость скорости реакции от температуры

### КРИТЕРИЙ ЛОУСОНА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЦЕНАРИЕВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ D-<sup>3</sup>He-ТОПЛИВА В ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ

Критерий Лоусона для термоядерных реакторов с магнитным удержанием плазмы в наиболее употребительном на сегодня виде записывается следующим образом [2, 8, 13]:

$$n\tau = 1.5(1 + \langle Z \rangle)T / [(Q^{-1} + f_c)A_f - A_{br} - A_{e-e}], \quad (18)$$

где  $T$  – температура плазмы, кэВ;  $n$  – концентрация ионов;  $Q$  – отношение средней удельной энергии термоядерного синтеза к средней удельной энергии, подводимой к плазме от внешних источников;  $f_c$  – доля термоядерной энергии, поглощаемая в плазме;  $A_f$  – функция, задающая мощность термоядерного синтеза;  $A_{br}$  – функция, задающая потери на тормозное излучение электронов на ионах;  $A_{e-e}$  – функция, задающая потери на тормозное излучение электронов на электронах;  $\langle Z \rangle = \sum Z_j n_j / \sum n_j$  – средний заряд ионов плазмы;  $n_e = \langle Z \rangle n$  – концентрация электронов. В формуле (18) величины  $A_f$  и  $f_c A_f$  задаются соотношениями

$$\begin{aligned} A_f n^2 &= 18533 \langle \sigma v \rangle_{DHe \rightarrow p\alpha} n_D n_{He} + 0.5(3269 \langle \sigma v \rangle_{DD \rightarrow nHe} + \\ &+ 4033 \langle \sigma v \rangle_{DD \rightarrow pT}) n_D^2 + 17589 \langle \sigma v \rangle_{DT \rightarrow n\alpha} n_D n_T, \\ (1 - f_c) A_f n^2 &= 1225 \langle \sigma v \rangle_{DD \rightarrow nHe} n_D^2 + 14028 \langle \sigma v \rangle_{DT \rightarrow n\alpha} n_D n_T, \end{aligned} \quad (19)$$

так что  $(1 - f_c) A_f n^2$  – есть энергия, уносимая нейтронами.

Энергия нейтронов 14.028 МэВ из реакции  $DT \rightarrow n\alpha$  была получена с использованием массы  $\alpha$ -частицы 4.001506 а.е.м. [28] и учетом релятивистских эффектов (см. Приложение). Функции  $A_{br}$  и  $A_{e-e}$ , задающие потери на тормозное излучение, взяты из работы [6]. В (18) отсутствует член, отвечающий магнитотормозному излучению – считается, что оно полностью поглощается в плазме.

Рассмотрим полностью катализированный D-D-цикл – образующиеся T и <sup>3</sup>He остаются в плазме и сгорают вместе с дейтерием.

Кинетика стационарного режима работы квазибесконечного ТЯР определяется условием: в плазме поддерживаются постоянные концентрации топливных ионов D, <sup>3</sup>He и T и ионов примесей – p и <sup>4</sup>He. Плазма предполагается изотермической, ионы гелия – двукратно ионизованными. С учетом основных с точки зрения величин энергосвечения и скоростей реакции в интересующей области температур плазмы порядка 50 – 150 кэВ уравнения кинетики для ионов топливных ионов D, <sup>3</sup>He и T и подлежащих удалению из рабочей среды ТЯР протонов и  $\alpha$ -частиц записываются следующим образом:

$$\frac{dn_D}{dt} = -\langle \sigma v \rangle_{DHe \rightarrow p\alpha} n_D n_{He} - 0.5 n_D^2 (\langle \sigma v \rangle_{DD \rightarrow pT} + \langle \sigma v \rangle_{DD \rightarrow nHe}) - \langle \sigma v \rangle_{DT \rightarrow n\alpha} n_D n_T + \frac{dn_{D\_ext}}{dt}, \quad (20)$$

$$\frac{dn_{He}}{dt} = -\langle \sigma v \rangle_{DHe \rightarrow p\alpha} n_D n_{He} + 0.5 \langle \sigma v \rangle_{DD \rightarrow nHe} n_D^2 + \frac{dn_{He\_ext}}{dt}, \quad (21)$$

$$\frac{dn_T}{dt} = 0.5 \langle \sigma v \rangle_{DD \rightarrow pT} n_D^2 - \langle \sigma v \rangle_{DT \rightarrow n\alpha} n_D n_T - \lambda n_T, \quad (22)$$

$$\frac{dn_\alpha}{dt} = \langle \sigma v \rangle_{DHe \rightarrow p\alpha} n_D n_{He} + \langle \sigma v \rangle_{DT \rightarrow n\alpha} n_D n_T - \Gamma_\alpha, \quad (23)$$

$$\frac{dn_p}{dt} = \langle \sigma v \rangle_{DHe \rightarrow p\alpha} n_D n_{He} + 0.5 \langle \sigma v \rangle_{DD \rightarrow pT} n_D^2 - \Gamma_p, \quad (24)$$

$dn_{D\_ext}/dt$  описывает подпитку ТЯР дейтерием,  $dn_{He\_ext}/dt$  – подпитку <sup>3</sup>He. Величина  $\lambda$  в (22) – скорость  $\beta$ -распада трития.  $\Gamma_\alpha$  и  $\Gamma_p$  описывают удаление  $\alpha$ -частиц и протонов из ТЯР:  $\Gamma_j = n_j / \tau_j$  ( $\tau_j$  – время удержания частиц типа  $j$ ). Приведенная форма уравнений кинетики означает, в частности, что пренебрегается реакциями водородного и

углеродного циклов, реакциями  $T + T$ ,  $T + {}^3\text{He}$  и  ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$ , а также энергией  $\beta$ -распада трития. Кроме того, в приведенной системе уравнений не учитывается уход топливных ионов из зоны реакции, как это сделано, например, в [13]. Поскольку  $dn_T/dt = 0$ , то равновесная концентрация трития равна

$$n_T = \frac{0.5\langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow pT}}{\langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha} n_D + \lambda} n_D. \quad (25)$$

Формула (25) позволяет оценить вклад  $\beta$ -распада трития, для чего надо сравнить  $\lambda n_T$  и  $\langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha} n_D n_T$ . Учтём, что  $\lambda \approx 2.9 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$ , а в диапазоне температур  $1 \cdot 10^8 - 1 \cdot 10^9 \text{ K}$

$$\langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha} n_D \approx (1 \cdot 10^{-18} - 2 \cdot 10^{-15}) n_D \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}, \quad (26)$$

так что при  $n_D \geq 1 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$  вкладом  $\beta$ -распада в (25) можно пренебречь. Тогда

$$n_T = \frac{0.5\langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow pT}}{\langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha}} n_D = \alpha \gamma_T n, \quad \gamma_T = \frac{0.5\langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow pT}}{\langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha}}, \quad (27)$$

где  $n = n_D + n_T + n_{\text{He}} + n_p + n_\alpha$  – концентрация ионов плазмы;  $\alpha$  – относительная концентрация дейтерия ( $n_D = \alpha n$ ). Выражение (27) совпадает с результатами работ [2, 29]. Ориентируясь на данные NACRE II при  $T = 105 \text{ кэВ}$  (ожидаемая температура критерия Лоусона для полностью катализированного режима), можно оценить наработку трития:

$$N_A \langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow pT} = 1.54 \cdot 10^7 \text{ см}^3 \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}, \quad N_A \langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha} = 4.76 \cdot 10^8 \text{ см}^3 \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1},$$

так что  $n_T/n_D = 0.5\langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow pT} n_D / (\langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha} n_D + \lambda) \approx 1.6 \cdot 10^{-2}$ .

Аналогично, равновесная концентрация  ${}^3\text{He}$  равна (в режиме самообеспечения  ${}^3\text{He}$ )

$$n_{\text{He}} = \frac{0.5\langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow n\text{He}}}{\langle\sigma v\rangle_{D\text{He}\rightarrow p\alpha}} n_D = \alpha \gamma_{\text{He}} n, \quad \gamma_{\text{He}} = \frac{0.5\langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow n\text{He}}}{\langle\sigma v\rangle_{D\text{He}\rightarrow p\alpha}}. \quad (28)$$

При наличии подпитки  ${}^3\text{He}$  выражение (28) следует заменить на

$$n_{\text{He}} = \frac{0.5\langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow n\text{He}}}{\langle\sigma v\rangle_{D\text{He}\rightarrow p\alpha}} n_D + \frac{dn_{\text{He-ext}}/dt}{\langle\sigma v\rangle_{D\text{He}\rightarrow p\alpha} n_D} = \alpha \gamma_{\text{He}} n \delta, \quad (29)$$

где в режиме подпитки  $\delta > 1$  – внешний параметр, который можно связать с удельной объемной мощностью ТЯР.

Средняя объемная энергия реакций синтеза  $P_f = A_f n^2$  в новых обозначениях записывается в виде

$$P_f = 18533 \langle\sigma v\rangle_{D\text{He}\rightarrow p\alpha} \alpha^2 \gamma_{\text{He}} n^2 + 0.5 \cdot 4033 \langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow pT} \alpha^2 n^2 + 0.5 \cdot 3269 \langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow n\text{He}} \alpha^2 n^2 + 17589 \langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha} \alpha^2 \gamma_T n^2. \quad (30)$$

Средняя объемная мощность  $P_c$ , выделяемая в плазме заряженными частицами,

$$P_c = 18533 \langle\sigma v\rangle_{D\text{He}\rightarrow p\alpha} \alpha^2 \gamma_{\text{He}} n^2 + 0.5 \cdot 4033 \langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow pT} \alpha^2 n^2 + 0.5 \cdot 819 \langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow n\text{He}} \alpha^2 n^2 + 3561 \langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha} \alpha^2 \gamma_T n^2 = A_c n^2 = f_c A_f n^2. \quad (31)$$

В режиме подпитки  ${}^3\text{He}$  параметр  $\gamma_{\text{He}}$  в (30) и (31) необходимо домножить на  $\delta$ .

Имеют место следующие соотношения:

$$(n_D + n_{\text{He}} + n_T + n_p + n_\alpha) / n = \alpha + \alpha \gamma_{\text{He}} \delta + \alpha \gamma_T + n_p / n + n_\alpha / n = 1. \quad (32)$$

Из (22) – (24) вытекает, что в стационарном режиме  $\Gamma_\alpha = \Gamma_p$ , так что

$$\frac{n_p}{n_\alpha} = \frac{\tau_p}{\tau_\alpha} = \xi = \frac{\langle\sigma v\rangle_{D\text{He}\rightarrow p\alpha} \gamma_{\text{He}} \delta + 0.5 \langle\sigma v\rangle_{DD\rightarrow pT}}{\langle\sigma v\rangle_{D\text{He}\rightarrow p\alpha} \gamma_{\text{He}} \delta + \langle\sigma v\rangle_{DT\rightarrow n\alpha} \gamma_T}. \quad (33)$$

Результаты определения критерия Лоусона и тройного критерия Лоусона  $nT$  для режима зажигания термоядерной реакции ( $Q = \infty$ ) и случая  $\xi = 1$  приведены ниже.

### 1. Режим с самообеспечением ${}^3\text{He}$ ( $\delta = 1$ )

В результате численного моделирования было установлено, что в режиме самообеспечения параметр  $n\tau T$  определяется в диапазоне концентрации дейтерия  $0.56 \leq \alpha \leq 0.9$ . При этом минимум этого параметра (тройной критерий Лоусона) отвечает значению  $\alpha = 0.89$  и равен

$$n\tau T = 1.03 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ} \quad (T = 45 \text{ кэВ}).$$

При таком значении  $\alpha$  критерий Лоусона выглядит следующим образом:

$$n\tau = 1.48 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \quad (T = 130 \text{ кэВ}).$$

Приведенные результаты качественно согласуются с результатами работы [29] для тройного критерия Лоусона  $n\tau T = (1 - 2) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ}$  ( $T = 50 - 70 \text{ кэВ}$ ).

Концентрации ионов плазмы и ее зарядовые характеристики таковы:

$$n_D = 0.89n, \quad n_{\text{He}} = 0.094n, \quad n_T = 0.0046n, \quad n_\alpha = 0.0055n, \quad n_p = 0.0055n, \\ \langle Z \rangle = 1.1, \quad \langle Z^2 \rangle = 1.3.$$

### 2. Полностью катализированный D-D-цикл

В случае полностью катализированного цикла тройной критерий Лоусона отвечает одинаковым концентрациям D и  ${}^3\text{He}$ , что заранее можно было ожидать, исходя из энергетических соображений:

$$n\tau T = 6.42 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ} \quad (T = 54 \text{ кэВ}, \quad n_D/n = n_{\text{He}}/n = 0.46, \quad \delta = 10.87).$$

Концентрации ионов плазмы и ее зарядовые характеристики таковы:

$$n_D = 0.46n, \quad n_{\text{He}} = 0.46n, \quad n_T = 0.0029n, \quad n_\alpha = 0.0386n, \quad n_p = 0.0386n, \\ \langle Z \rangle = 1.5, \quad \langle Z^2 \rangle = 2.5.$$

Соответствующий указанным выше параметрам  $n_D$  и  $\delta$  критерий Лоусона имеет вид

$$n\tau = 8.35 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \quad (T = 123 \text{ кэВ}).$$

Для сравнения приведем значение минимума параметра  $n\tau T$  при  $n_D/n = 0.5$ :

$$n\tau T = 8.02 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ} \quad (T = 56 \text{ кэВ}, \quad \delta = 7.3).$$

$$n_D = 0.5n, \quad n_{\text{He}} = 0.313n, \quad n_T = 0.0036n, \quad n_\alpha = 0.0845n, \quad n_p = 0.0845n, \\ \langle Z \rangle = 1.4, \quad \langle Z^2 \rangle = 2.2.$$

Полученные результаты близки к приведенным в работе [2] как для критерия Лоусона

$$n\tau = 6.20 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \quad (T = 106 \text{ кэВ}),$$

так и для тройного критерия

$$n\tau T = 5.20 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ} \quad (T = 68 \text{ кэВ}).$$

Однако прямое сравнение затруднительно, так как в [2] не приводятся концентрации дейтерия и  ${}^3\text{He}$ .

### 3. Некатализированный D-D-цикл для эквимольного D- ${}^3\text{He}$ -топлива ( $n_D = 0.5n$ )

$$n\tau = 6.01 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \quad (T = 103 \text{ кэВ}), \quad n\tau T = 4.89 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ} \quad (T = 67 \text{ кэВ}).$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом проведенного рассмотрения является определение (в рамках модельной задачи) критерия Лоусона и тройного критерия Лоусона для термоядерных устройств с магнитным удержанием плазмы, использующих D- ${}^3\text{He}$ -топливо, на основе уточненной температурной зависимости скорости реакции синтеза  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$ , определяемой с помощью новой параметризации сечения и астрофизического фактора данной реакции в приближении эффективного радиуса. Рассчитанные значения скорости реакции находятся в хорошем согласии с результатами R-матричной теории и данными, приведенными в библиотеке NACRE II, однако в

отличие от этих подходов приближение эффективного радиуса не требует значительных вычислительных ресурсов. Было установлено, что в случае полностью катализированного цикла тройной критерий Лоусона отвечает эквивалентному D-<sup>3</sup>He-топливу ( $n_D/n = n_{He}/n = 0.46$ ) с параметрами  $n\tau T = 6.42 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>·с·кэВ ( $T = 54$  кэВ) и характеризуется наименьшей относительной концентрацией ядерной золы. На следующем этапе предполагается применить разработанный подход к изучению характеристик конкретных термоядерных установок с магнитным удержанием плазмы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим экзотермическую реакцию с образованием частиц 1 и 2 с энергиями покоя  $E_{01}$  и  $E_{02}$  и энергетическим выходом  $Q$ . Будем считать, что входной канал характеризовался исчезающе малым суммарным импульсом, как это имеет место в случае реакций термоядерного синтеза. Тогда импульсы частиц 1 и 2 практически одинаковы по модулю. Воспользуемся релятивистским соотношением между импульсом и энергией  $p^2c^2 = E^2 - E_0^2 = T^2 + 2TE_0$ ,  $T = E - E_0$  – кинетическая энергия частицы. Возникает система двух уравнений:

$$T_1^2 + 2T_1E_{01} = T_2^2 + 2T_2E_{02} \quad \text{и} \quad T_1 + T_2 = Q. \quad (\text{П.1})$$

Решение имеет вид

$$T_1 = \frac{QE_{02}}{E_{01} + E_{02}} + \frac{0.5Q^2(E_{01} - E_{02})}{(E_{01} + E_{02} + Q)(E_{01} + E_{02})}. \quad (\text{П.2})$$

Первое слагаемое в (П.2) отвечает нерелятивистскому приближению:

$$T_1^{\text{нерел}} = QE_{02}/(E_{01} + E_{02}) = Qm_2/(m_1 + m_2).$$

Если первой частицей является нейтрон, а второй –  $\alpha$ -частица, масса которой принята равной 4.001506 а.е.м. в соответствии с рекомендациями системы физических величин CODATA [28], то  $T_1^{\text{нерел}} = 14.048$  МэВ.

Поправка к первому слагаемому в (П.2) отрицательна и составляет от него долю

$$\eta = \frac{0.5Q^2(E_{01} - E_{02})}{(E_{01} + E_{02} + Q)(E_{01} + E_{02})} \approx -1.4 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, энергия нейтрона равна  $T_1 = 14.048(1 + \eta) = 14.028$  МэВ.

## Литература

1. Lawson J.D. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. // Proceedings of the Physical Society. Section B. – 1957. – Vol. 70 (1):6. DOI: <https://doi.org/10.1088/0370-1301/70/1/303>.
2. Wurzel S.E., Hsu S.C. Progress toward fusion energy breakeven and gain as measured against the Lawson criterion. // Phys. Plasmas. – 2022. – Vol. 29. – 062103. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0083990>.
3. Жданов С.К., Курнаев В.А., Романовский М.К., Цветков И.В. Основы физических процессов в плазме и плазменных установках. – М: МИФИ, 2007. – 368 с.
4. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. – М: Гос. изд. физматлит., 1965. – 496 с.
5. Рыжков С.В., Чирков А.Ю. Системы альтернативной термоядерной энергетики. – М.: Физматлит, 2017. – 200 с.
6. Хвесюк В.И., Чирков А.Ю. Производство энергии в амбиполярных реакторах с D-T, D-<sup>3</sup>He и D-D топливными циклами. // Письма в ЖЭТФ. – 2000. – Т. 26. – Вып. 21. – С. 61-65. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1329685>.
7. Широков Ю.М., Юдин Н.П. Ядерная физика. – М: Наука, 1980. – 729 с.
8. Баско М.М. Физические основы инерциального термоядерного синтеза. – М: ИТЭФ, 2007. – 147 с.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1974. – 752 с.
10. Bethe A.H. Theory of the effective range in nuclear scattering. // Physical Review. – 1949. – Vol. 76. – No. 1. – PP. 38-50. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.38>.
11. Барит И.Я., Сергеев В.А. Анализ резонансных реакций  $\text{H}^3(\text{d},\text{n})\text{He}^4$  и  $\text{He}^3(\text{d},\text{p})\text{He}^4$  в приближении эффективного радиуса взаимодействия. // Труды ФИАН СССР им. П.Н. Лебедева. – 1969. – Т. 44. – С. 3-15.
12. Карнаков Б.М., Мур В.Д., Поздняков С.Г., Попов В.С. Полюса и резонансы в низкоэнергетическом рассеянии заряженных частиц. // Ядерная физика. – 1991. – Т. 54. – Вып. 2(8). – С. 400-403.
13. Stott P.E. The feasibility of using D- $^3\text{He}$  and D-D fusion fuels. // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2005. – Vol. 47. – PP. 1305-1338. DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/47/8/011>.
14. Bosch H.S., Hale G.M. Fusion cross-sections and thermal reactivities. // Nuclear Fusion. – 1992. – Vol. 32. – No. 4. – PP. 620-622. DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/47/8/011>.
15. Козлов Б.Н. Скорости термоядерных реакций. // Атомная энергия. – 1962. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 238-240. Электронный ресурс: [http://elib.biblioatom.ru/text/atomnaya-energiya\\_t12-3\\_1962/go,50/](http://elib.biblioatom.ru/text/atomnaya-energiya_t12-3_1962/go,50/) (дата доступа 01.03.2023).
16. Fowler W.A., Caughlan G.R., Zimmerman B.A. Thermonuclear reaction rates. // Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics. – 1967. – Vol. 5. – PP. 525-570. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.05.090167.002521>.
17. Caughlan G.R., Fowler W.A. Thermonuclear Reaction Rates V. // Atomic Data and Nuclear Data Tables. – 1988. – Vol. 40. – PP. 283-334. DOI: [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(88\)90009-5](https://doi.org/10.1016/0092-640X(88)90009-5).
18. Годес А.И., Кудрявцева А.С., Шаблов В.Л. Аналитический вариант резонансной модели связанных каналов для реакции  $\text{D} + \text{T} \rightarrow {}^5\text{He}^{**} \rightarrow \alpha + \text{n}$  и его применение к описанию низкоэнергетического D-T и D- $^3\text{He}$  рассеяния. // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2019. – № 2. – С. 198-207. DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2019.2.17>.
19. Peres A. Fusion cross sections and thermonuclear reaction rates. // Journal of Applied Physics. – 1979. – Vol. 50. – PP. 5569-5570. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.326748>.
20. Белов А.А., Калиткин Н.Н. Регуляризация метода двойного периода при обработке экспериментальных кривых. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57. – № 11. – С. 1171-1181. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466917110035>.
21. Moller W., Besenbaer F. A note on the  ${}^3\text{He} + \text{D}$  nuclear-reaction cross section. // Nuclear Instruments and Methods. – 1980. – Vol. 168. – PP. 111-114. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-2889-1.50020-7>.
22. Krauss A., Becker H.W., Trautvetter H.P., Rolfs C., Brand K. Low-energy fusion cross sections of D+D and D+  ${}^3\text{He}$  reactions. // Nuclear Physics. – 1987. – Vol. A465. – PP. 150-172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(87\)90302-2](https://doi.org/10.1016/0375-9474(87)90302-2).
23. Geist W.H., Brune C.R., Karwowski H.J., Ludwig E.J., Veal K.D., Hale G.M. The  ${}^3\text{He}(\text{d},\text{p}){}^4\text{He}$  reaction at low energies. // Phys. Rev. C. – 1999. – Vol. 60. – PP. 054003-1-054003-9.
24. Xia Y., Takahashia K., Gorielya S., Arnoulda M., Ohtac M., Utsunomiyad H. NACRE II: an update of the NACRE compilation of charged-particle-induced thermonuclear reaction rates for nuclei with mass number  $A < 16$ . // Astronomy & Astrophysics. – 2013. – V. 549. – A106. – 120 p. DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220537>.
25. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра. – М.: Мир, 1980. – 502 с.
26. Балашко Ю.Г. Исследования упругого рассеяния заряженных частиц на некоторых легких ядрах при низких энергиях. // Труды физического института им. П.Н. Лебедева АН СССР. – 1965. – Т. 33. – С. 66-126.

27. *Alper I.B., Godes A.I., Shablov V.L.* New parametrization for the  ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$  fusion reaction rate and refinement of the Lawson criterion for d- ${}^3\text{He}$  thermonuclear reactors. // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2103. – 012197. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2103/1/012197>.

28. *Tiesinga E., Mohr P.J., David B., Newell D.B., Taylor B.N.* CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018. // Rev. Mod. Phys. – 2021. – Vol. 93. – PP. 025010-1-025010-63. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010>.

29. *Khvesyuk V.I., Chirkov A.Yu.* Low-radioactivity D- ${}^3\text{He}$  fusion fuel cycles with  ${}^3\text{He}$  production. // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2002. – Vol. 44. – PP. 263-260. DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/44/2/308>.

Поступила в редакцию 04.03.2023 г.

#### Авторы

Годес Александр Игоревич, аспирант

E-mail: [godes.ai@yandex.ru](mailto:godes.ai@yandex.ru)

Шаблов Владимир Леонидович, профессор, д-р физ.-мат. наук

E-mail: [shablov.vl@yandex.ru](mailto:shablov.vl@yandex.ru)

UDC 533.92

## Lawson Criterion for Different Scenarios of Using D- ${}^3\text{He}$ Fuel in Fusion Reactors

Godes A.I., Shablov V.L.

IATE MPhI

1 Studgorodok, 249039 Obninsk, Kaluga Reg., Russia

#### ABSTRACT

The paper is devoted to refining the Lawson criterion for three scenarios of using D- ${}^3\text{He}$  fuel in fusion reactors (fully catalyzed and non-catalyzed D-D cycles and a D- ${}^3\text{He}$  cycle with  ${}^3\text{He}$  self-supply). To this end, a new parameterization of the  $\text{D} + {}^3\text{He} \rightarrow \text{p} + {}^4\text{He}$  fusion reaction cross-section and astrophysical factor has been developed based on the effective radius approximation (Landau-Smorodinsky-Bethe approximation), which is a model-free theoretical approach to investigating near-threshold nuclear reactions, including resonant reactions. As part of this approximation, experimental data from studies in the NACRE II and EXFOR libraries, believed to provide the most reliable results to date, have been described within the accuracy declared in the studies in question in the energy range of 0 to 1000 keV, and the temperature dependence of the reaction rate averaged over the Maxwell distribution has been calculated. The results obtained are in good agreement with the calculations based on  $R$ -matrix theory and the NACRE II reaction rate data. For the fully catalyzed D-D cycle and the cycle with  ${}^3\text{He}$  self-supply, the Lawson criterion and the triple Lawson criterion have been calculated based on solving the equations of the stationary process kinetics in a fusion reactor for three fuel ions (D,  ${}^3\text{He}$ , and T) taking into account the potential for external supply of  ${}^3\text{He}$  and p &  ${}^4\text{He}$  impurity ions removed from the reaction zone. The parameters of the triple Lawson criterion found are as follows:  $n\tau T = 6.42 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{keV}$  ( $T = 54 \text{ keV}$ ) for the fully catalyzed D-D cycle,  $n\tau T = 1.03 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{keV}$  ( $T = 45 \text{ keV}$ ) for the cycle with  ${}^3\text{He}$  self-supply, and  $n\tau T = 4.89 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{keV}$  ( $T = 67 \text{ keV}$ ) for the non-catalyzed D-D cycle with equimolar D- ${}^3\text{He}$  fuel.

**Key words:** thermonuclear reactions, effective radius approximation, cross-section and astrophysical factor of  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$  fusion reaction, Lawson criterion for different  $D$ - ${}^3\text{He}$  fuel use scenarios.

Godes A.I., Shablov V.L. Lawson Criterion for Different Scenarios of Using  $D$ - ${}^3\text{He}$  Fuel in Fusion Reactors. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*. 2023, no. 2, pp. 134-147; DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2023.2.11> (in Russian).

#### REFERENCES

1. Lawson J.D. Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*. 1957, v. 70 (1):6; DOI: <https://doi.org/10.1088/0370-1301/70/1/303>.
2. Wurzel S.E., Hsu S.C. Progress Toward Fusion Energy Breakeven and Gain as Measured Against the Lawson Criterion. *Phys. Plasmas*. 2022, v. 29, 062103; DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0083990>.
3. Zhdanov S.K., Kurnaev V.A., Romanovsky M.K., Tsvetkov I.V. *Fundamentals of Physical Processes in Plasma and Plasma Installations*. Moscow. МЭФІ Publ., 2017, 200 p. (in Russian).
4. Artsimovich L.A. *Controlled Thermonuclear Reactions*. Gordon and Breach Science Publishers, NY, 1964, 405 p.
5. Ryzhkov S.V., Chirkov A.Yu. *Systems of Alternative Thermonuclear Power Engineering*. Moscow. Fizmatlit Publ., 2017, 200 p. (in Russian).
6. Khvesyuk V.I., Chirkov A.Yu. Energy Production in Ambipolar Reactors with  $D$ - $T$ ,  $D$ - ${}^3\text{He}$  and  $D$ - $D$  Fuel Cycles. *Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noy i Teoreticheskoy Fiziki*. 2000, v. 26, no. 21, pp.61-65; DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1329685> (in Russian).
7. Shirokov Yu.M., Yudin N.P. *Nuclear Physics*. Moscow. Nauka Publ., 1980, 729 p. (in Russian).
8. Basko M.M. *Physical Foundations of the Inertial Thermonuclear Fusion*. Moscow. ITEPh Publ., 2007, 147 p. (in Russian).
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics. Vol. 3. Quantum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1977, 671 p.
10. Bethe A.H. Theory of the Effective Range in Nuclear Scattering. *Physical Review*. 1949, v. 76, no. 1, pp. 38-50; DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.38>.
11. Barit I.Ya., Sergeev V.A. Analysis of Resonance Reactions  $H^3(d,n)He^4$  and  $He^3(d,p)He^4$  in the Interaction Effective Range Approximation. *Trudy FIAN SSSR. im. P.N. Lebedeva*. 1969, v. 44, pp. 3-15 (in Russian).
12. Karnakov B.M., Mur V.D., Pozdnyakov S.G., Popov V.S. Poles and Resonances in Low-Energy Scattering of Charged Particles. *Yadernaya Fizika*. 1991, v. 54, no. 2(8), pp. 400-403 (in Russian).
13. Stott P.E. The Feasibility of Using  $D$ - ${}^3\text{He}$  and  $D$ - $D$  Fusion Fuels. *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2005, v. 47, pp. 1305-1338; DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/47/8/011>.
14. Bosch H.S., Hale G.M. Fusion Cross-Sections and Thermal Reactivities. *Nuclear Fusion*. 1992, v. 32, no. 4, pp.620-622; DOI: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/32/4/I07>.
15. Kozlov B.N. Thermonuclear Reaction Rates. *Atomnaya Energiya*. 1962, v. 12, iss. 3, pp. 238-240. Available at: [http://elib.biblioatom.ru/text/atomnaya-energiya\\_t12-3\\_1962/go,50/](http://elib.biblioatom.ru/text/atomnaya-energiya_t12-3_1962/go,50/) (accessed Mar. 01, 2023) (in Russian).
16. Fowler W.A., Caughlan G.R., Zimmerman B.A. Thermonuclear Reaction Rates. *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics*. 1967, v. 5, pp. 525-570; DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.05.090167.002521>.
17. Caughlan G.R., Fowler W.A. Thermonuclear Reaction Rates V. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. 1988, v. 40, pp. 283-334; DOI: [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(88\)90009-5](https://doi.org/10.1016/0092-640X(88)90009-5).

18. Godes A.I., Kudriavtseva A.S., Shablov V.L. Analytical Version of the Resonance Coupled-Channel Model for  $D + T \rightarrow {}^5\text{He}^{**} \rightarrow \alpha + n$  Reaction and its Application for the Description of Low-Energy D-T and D- ${}^3\text{He}$  Scattering. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*. 2019, no.2, pp. 198-207; DOI: <https://doi.org/10.26583/npe.2019.2.17> (in Russian).
19. Peres A. Fusion Cross Sections and Thermonuclear Reaction Rates. *Journal of Applied Physics*. 1979, v. 50, pp. 5569-5570; DOI: <https://doi.org/10.1063/1.326748>.
20. Belov A.A., Kalitkin N.N. Regularization of the double period method in processing experimental curves. *Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki*. 2017, v. 57, no. 11, pp. 1171-1181; DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466917110035> (in Russian).
21. Moller W., Besenbahr F. A Note on the  ${}^3\text{He} + \text{D}$  Nuclear-Reaction Cross Section. *Nuclear Instruments and Methods*. 1980, v. 168, pp. 111-114; DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-2889-1.50020-7>.
22. Krauss A., Becker H.W., Trautvetter H.P., Rolfs C., Brand K. Low-Energy Fusion Cross Sections of D+D and D+ ${}^3\text{He}$  Reactions. *Nuclear Physics*. 1987, v. A465, pp. 150-172; DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(87\)90302-2](https://doi.org/10.1016/0375-9474(87)90302-2).
23. Geist W.H., Brune C.R., Karwowski H.J., Ludwig E.J., Veal K.D., Hale G.M. The  ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$  Reaction at Low Energies. *Physical Review. C*. 1999, v. 60, pp. 054003-1-054003-9.
24. Xua Y., Takahashia K., Gorielya S., Arnoulda M., Ohtac M., Utsunomiyad H. NACRE II: an Update of the NACRE Compilation of Charged-Particle-Induced Thermonuclear Reaction Rates for Nuclei with Mass Number  $A < 16$ . *Astronomy & Astrophysics*. 2013, v. 549, A106, 120 p.; DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220537>.
25. Wildermuth K., Tang J.C. *A Unified Theory of the Nucleus*. Vieweg Publ. Braunschweig, 1999, 389 p.
26. Balashko Yu.G. Investigations of Elastic Scattering of Charged Particles on Some Light Nuclei at Low Energies. *Trudy FI AN SSSR. im. P.N. Lebedeva*. 1965, v. 33, pp. 66-126 (in Russian).
27. Alper I.B., Godes A. I., Shablov V.L. New Parametrization for the  ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$  Fusion Reaction Rate and Refinement of the Lawson Criterion for D- ${}^3\text{He}$  Thermonuclear Reactors. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021, v. 2103, 012197; DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2103/1/012197>.
28. Tiesinga E., Mohr P.J., David B. Newell D.B., Taylor B.N. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018. *Review of Modern Physics*. 2021, v. 93, pp. 025010-1-025010-63; DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010>.
29. Khvesyuk V.I., Chirkov A.Yu. Low-Radioactivity D- ${}^3\text{He}$  Fusion Fuel Cycles with  ${}^3\text{He}$  Production. *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. v. 44, pp. 263-260; DOI: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/44/2/308>.

#### Authors

Aleksandr I. Godes, PhD Student

E-mail: [godes.ai@yandex.ru](mailto:godes.ai@yandex.ru)

Vladimir L. Shablov, Professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

E-mail: [shablov.vl@yandex.ru](mailto:shablov.vl@yandex.ru)