УДК 621.039.514.4:621.039.515:621.039.516.2:378 DOI 10.26583/npe.2021.1.14

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИНАМИКИ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

**А.Г. Юферов**

***Обнинский институт ядерной энергетики ИАТЭ НИЯУ «МИФИ»***
***249040, Калужская обл., г. Обнинск, Студгородок, 1***

Рассмотрен ряд методических вопросов преподавания динамики ядерных реакторов с целью оптимизации учебных планов для достижения более тесной взаимосвязи курсов теоретической, экспериментальной и вычислительной физики ядерных реакторов посредством уточнения ряда формулировок, упрощения математических построений и рационализации понятийного аппарата. Описано введение основных понятий динамики ядерного реактора – реактивности, времён генерации и жизни нейтронов – на основе простейшего баланса скоростей генерации и потери нейтронов деления. Показана предпочтительность применения реактивности в $\Lambda$-шкале – $r = \rho/\Lambda$. Предлагается описывать динамику реактора на основании модифицированной формы интегрального уравнения динамики. В этой форме уравнение специфицируется только временной зависимостью реактивности и ядром интеграла – функцией репродукции предшественников запаздывающих нейтронов (ПЗН). Это унифицирует рассмотрение прямой и обратной задач динамики, сводя их к вычислению интеграла репродукции ПЗН. При наличии нескольких делящихся нуклидов ядро интегрального уравнения есть сумма соответствующих функций репродукции, причём последние не требуют в общем случае представления суммой экспонент. Это позволяет не конкретизировать число групп эмиттеров запаздывающих нейтронов и не вводить упрощающих допущений в ситуациях, которые традиционно рассматривались в предположении одной группы запаздывающих нейтронов и одного делящегося нуклида. Предлагаемые изменения сокращают физический объём учебных материалов, но сохраняют их смысловое содержание и позволяют предусмотреть в учебных планах больше часов на углубленное изучение вопросов, связанных с современными задачами управления и идентификации мультиплицирующих систем различного типа.

**Ключевые слова:** динамика ядерного реактора, методика преподавания.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время доступно большое количество монографической и учебной литературы, посвященной динамике ядерных реакторов [1 – 25]. На этом материале можно сформировать учебные планы различного объёма и направленности. Однако обнаруживается, что из книги в книгу переносится ряд ставших привычными тезисов, определений, понятий, с традиционной интерпретацией и применением которых нельзя согласиться в полной мере. Соответствующие вопросы относятся, в частности, к следующим разделам динамики ядерных реакторов:

– вывод уравнений динамики;
– трактовка точности точечной модели динамики;
– взаимосвязь реактивности, периода и коэффициента размножения;
– динамика запаздывающих нейтронов (ЗН);
– проблема жесткости уравнений кинетики ЯР;
– дискретизация обращённого решения уравнения кинетики;
– линеаризация уравнений динамики.

При обсуждении этих тем студенты задают, например, следующие вопросы: «Зачем вводится понятие реактивности как меры отклонения от критичности, если из величины коэффициента размножения непосредственно усматривается его отклонение от единицы?», «Почему нейтроны называются запаздывающими, если в уравнениях кинетики скорость их генерации $\lambda_j c_j(t)$ задаётся непосредственно для текущего момента времени $t$ без какого-либо запаздывания $(t - \tau)$?», «Почему для характеристики динамического состояния реактора необходимо использовать две величины – период и реактивность?», «Почему уравнения точечной кинетики после линеаризации фактически принимают исходный вид?», «Почему используется конечно-разностная дискретизация уравнений для концентраций осколков деления, если они решаются аналитически?», «Почему в уравнениях кинетики не фигурирует число запаздывающих нейтронов?»

Изложение соответствующих разделов целесообразно уточнить для лучшего понимания студентами картины процессов в ядерном реакторе и её математического описания. В более широком контексте это должно обеспечить также

– более адекватное описание указанных процессов;
– построение более лаконичных схем вывода тех или иных соотношений;
– упрощение структуры математических моделей;
– тесную взаимосвязь курсов теоретической, экспериментальной и вычислительной физики ЯР;
– согласование и унификацию изложения динамики ЯР с формулировками и схемами рассмотрения динамических задач, принятыми в смежных областях;
– возможность формулировки новых методик идентификации и численного моделирования;
– более явную взаимосвязь динамической и стохастической трактовок процессов в ЯР.

## О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЯР

Нестационарные уравнения переноса нейтронов – уравнения динамики ЯР – в любых приближениях суть балансные уравнения для скоростей процессов. Поэтому целесообразно начинать знакомство студентов с моделями динамики ЯР с элементарного баланса скоростей для основного процесса, отвечающего за изменение числа нейтронов $n(t)$ – процесса деления:

$$\begin{aligned} dn(t)/dt &= \nu(t) = \nu^{г}_{мн}(t) - \nu^{п}_{мн}(t) + Q_0(t) = \\ &= w^{г}_{мн}(t)\cdot n(t) - w^{п}_{мн}(t)\cdot n(t) + Q_0(t) = r(t)\cdot n(t) + Q_0(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $n(t)$ – полное число нейтронов в системе; $\nu^{г}_{мн}(t)$, $\nu^{п}_{мн}(t)$ – скорости генерации и потери мгновенных нейтронов деления; $w^{г}_{мн}(t) = \nu^{г}_{мн}(t)/n(t)$, $w^{п}_{мн}(t) = \nu^{п}_{мн}(t)/n(t)$ – соответствующие относительные скорости; $r(t) = w^{г}_{мн}(t) - w^{п}_{мн}(t) =$ – относительная скорость репродукции мгновенных нейтронов деления; дополнительный источник $Q_0$ объединяет все прочие процессы, влияющие на изменение полного числа нейтронов и, возможно, зависящие от этого числа. Дальнейшее изложение целесообразно вести путем последовательной детализации исходной модели (1).

Уравнение (1) позволяет ввести в рассмотрение все традиционные параметры динамики ЯР, связанные с нейтронами деления, – время генерации $\Lambda = 1/w^{г}{}_{мн}(t)$, время жизни $l = 1/w^{п}{}_{мн}(t)$, коэффициент размножения $k = l/\Lambda = w^{г}/w^{п}$ – и выразить их взаимосвязь в форме

$$r = \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{l} = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{k-1}{l} = \frac{\rho}{\Lambda}. \tag{2}$$

Из этих соотношений видно, что более содержательным и интерпретируемым понятием является не традиционная реактивность $\rho = (k - 1)/k = (1 - \Lambda/l)$, а реактивность в $\Lambda$-шкале – $r = \rho/\Lambda$, имеющая смысл относительной скорости или вероятности репродукции мгновенных нейтронов деления (термин «репродукция» используем для обозначения совокупности процессов генерации и потери частиц, приняв, что скорость репродукции есть разность скоростей генерации и потери, т.е. может быть положительной, отрицательной или нулевой). В обозначениях (2) уравнение (1) принимает вид

$$\nu(t) = rn(t) = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{k-1}{k}\right)n(t) = \frac{k-1}{l}n(t),$$

тождественный «элементарному уравнению кинетики». Однако уравнение (1) позволяет не вводить представление о поколениях нейтронов и обойтись одним параметром $r$ вместо двух – $k$, $l$.

Уже на данном этапе построения модели динамики уместно обратить внимание студентов, что относительные скорости $w^{г}$, $w^{п}$, $r$ можно интерпретировать как вероятности генерации, потери и репродукции нейтронов деления соответственно. Это перекидывает полезный мостик к вероятностно-статистическим методам физики реакторов.

Дальнейшая детализация процессов в ЯР требует, согласно данным ядерной физики, учесть генерацию нейтронов, обусловленную $\beta$-распадом осколков деления, которые объединяются в $J$ групп согласно характерным постоянным распада $\lambda_j$. В таком случае (если не конкретизировать подробно элементарные стадии деления и распада) процесс деления описывается следующими параллельно-последовательными реакциями:

$$\begin{aligned} &n + M \xrightarrow{k_1} \nu n, \\ &n + M \xrightarrow{k_j} c_j \xrightarrow{\lambda_j} n, \quad j = \overline{1, J}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $n$ – нейтрон; $M$ – делящийся нуклид; $c_j$ – осколок $j$-й группы; $k_1$, $k_j$ – константы скорости реакций; $\nu$ – число мгновенных нейтронов на одно деление (символами $n$, $c_j$, $M$ обозначаем также соответствующие концентрации или полное число частиц). С учётом данной схемы реакций модель (1) конкретизируется согласно известным правилам химической кинетики [27]:

$$dn/dt = (\nu - 1)k_1 nM - w^{п}{}_{мн} n + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j c_j - \sum_{j=1}^{J} k_j nM + Q, \tag{4}$$

$$dc_j/dt = -\lambda_j c_j + k_j nM, \quad \overline{j = 1, J}. \tag{5}$$

Уравнение (4) есть детализация уравнения (1) с соответствующей корректировкой источника, а уравнение (5) описывает репродукцию осколков деления – предшественников запаздывающих нейтронов (ПЗН). Для ядерных реакций, как и для химических, применим закон действующих масс, что и обеспечивает аналогичный подход к получению уравнений кинетики. Каких-либо иных предположений для вывода этих уравнений не требуется. При этом в контексте схем реакций (3) и уравнений (4), (5) можно говорить, что наличные нейтроны *потребляются* на производство осколков. Такая терминология позволяет упростить дальнейшие формулировки.

Здесь следует обратить внимание студентов на то, что для применения уравнений (4), (5) необходимо найти константы скорости экспериментально или на основании более детальной теории. Причём имеет место определённая свобода в представлении констант скорости. Так, введение «эффективных» констант $r = (\nu - 1)k_1M - w^{п}{}_{мн}$ и $\beta_j/\Lambda = k_jM$ позволяет не учитывать изменение количества делящегося нуклида $M$ и приводит уравнения (4), (5) к традиционной форме уравнений кинетики ЯР

$$dn/dt = rn - h_0n + \sum_{j=1}^{J}\lambda_j c_j + Q, \quad dc_j/dt = -\lambda_j c_j + \left(\beta_j/\Lambda\right)n, \quad \overline{j=1,J}, \tag{6}$$

отличающейся только использованием реактивности в $\Lambda$-шкале и выделением суммарной по всем группам скорости генерации ПЗН

$$\nu^{г}{}_{пзн} = h_0 n \equiv \sum_{j=1}^{J} k_j nM, \quad h_0 = \beta/\Lambda, \quad \beta = \sum_{j=1}^{J}\beta_j.$$

Согласно уравнению (6), величина $\nu^{г}{}_{пзн}$ может интерпретироваться также как скорость потребления наличных нейтронов (мгновенного и осколочного происхождения) на генерацию ПЗН.

При данной степени детальности модели конечный продукт второй реакции (3) – запаздывающие нейтроны – никак не выделяется, ничем не отличаясь от исходного продукта – нейтронов, вызывающих деление. Число запаздывающих нейтронов или скорость изменения этого числа в уравнениях (4), (5) явно не фигурируют. Присутствует только скорость их генерации $\lambda_jc_j$, определяемая числом предшественников $c_j$. Её можно исключить, сделав замену $k_jnM - \lambda_jc_j = dc_j/dt$ в уравнении (4). Это приводит его к виду

$$dn(t)/dt = r(t)n(t) - \sum_{j=1}^{J} dc_j(t)/dt + Q(t). \tag{7}$$

Уравнение (7) описывает динамику полной популяции нейтронов как баланс скоростей репродукции ПЗН $dc_j(t)/dt$ и мгновенных нейтронов деления $r(t)n(t)$ с учётом интенсивности источника. Уравнение указывает на стабилизирующую роль ПЗН в процессах изменения числа нейтронов – увеличение ($dc_j(t)/dt > 0$) или уменьшение ($dc_j(t)/dt < 0$) производства ПЗН влечёт соответственно уменьшение или увеличение скорости изменения полного числа нейтронов.

Введём переменную $s_j(t) \equiv dc_j(t)/dt$. Согласно (5), для неё справедливо уравнение

$$ds_j(t)/dt = -\lambda_j s_j(t) + (\beta_j/\Lambda)dn(t)/dt. \tag{8}$$

Оно выражает *баланс ускорений* для процессов генерации и потери ПЗН. В стационарном состоянии реактора $s_j(t) \equiv 0$. При таких начальных условиях решение уравнения (8) есть

$$s_j(t) = (\beta_j/\Lambda)\int_0^t \exp(-\lambda_j(t-\tau))dn(\tau).$$

Подстановка этого решения в (7) приводит к интегральному уравнению для скорости изменения числа нейтронов $\nu(t) = dn/dt$

$$\nu(t) = r(t)n(t) - \int_0^t h(t-\tau)\nu(\tau)d\tau + Q(t), \tag{9}$$

описывающему динамику ЯР после выхода из стационарного состояния.

Интеграл

$$Y(t) = \int_0^t h(t-\tau)dn(\tau) \equiv \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{J} c_j(t)$$

с ядром

$$h(t-\tau)=\sum_{j=1}^{J}(\beta_j/\Lambda)\exp[-\lambda_j(t-\tau)]$$

можно назвать *интегралом репродукции предшественников запаздывающих нейтронов* (ИРП), поскольку он равен текущей суммарной скорости репродукции осколков деления – предшественников запаздывающих нейтронов – и выражает итоговый (на интервале времени $[0, t]$) положительный или отрицательный вклад ПЗН в скорость изменения полного числа нейтронов в момент $t$. Ядро интеграла описывает изменение скорости репродукции ПЗН на интервале $(t-\tau)$, обусловленное добавлением (или изъятием) одного нейтрона в момент $\tau$. Если, например, такое добавление происходит в момент $t = 0$, то

$$h(t)=Y(t)=\sum_{j=1}^{J}(\beta_j/\Lambda)\exp(-\lambda_j t)=dc(t)/dt, \quad c(t)=\sum_{j=1}^{J}c_j(t).$$

Обычно функцию $h(t)$ называют функцией распада запаздывающих нейтронов [21]. В связи с вышеизложенным такая терминология не вполне корректна. Во-первых, распадаются не нейтроны, а их предшественники. Во-вторых, видно, что функция $h(t)$ характеризует не распад (описываемый слагаемыми $\lambda_j c_j$ в уравнениях (4)), а изменение скорости репродукции ПЗН с течением времени (после введения одного нейтрона в момент $t = 0$). Поэтому представляется более уместным называть эту функцию *функцией репродукции предшественников* (ФРП).

Уравнение (9) есть вариант известных интегральных уравнений динамики ЯР [21 – 24]. В отличие от последних оно существенно проще по структуре и не содержит величин $c_j(t)$, которые фактически не наблюдаемы при эксплуатации ЯР. Это уравнение тривиально обобщается на случай нескольких делящихся нуклидов путём представления ядра ИРП суммой функций репродукции предшественников всех делящихся нуклидов, присутствующих в реакторе.

Из уравнения (9) очевидным образом следует уравнение реактиметра

$$r(t)=\alpha(t)+\frac{1}{n(t)}\int_0^t h(t-\tau)dn(\tau)+Q(t)/n(t). \tag{10}$$

Оно выражает баланс относительных скоростей процессов, учитываемых в модели, т.е. позволяет сопоставить их вклад в темп изменения полного числа нейтронов, характеризуемый обратным периодом $\alpha(t) = \nu(t)/n(t)$. Одинаковая размерность величин $r$, $\alpha$ и $\beta_j/\Lambda$ упрощает сопоставление скоростей процессов в ЯР и анализ зависимостей «период-реактивность». Это ещё один довод в пользу применения $\Lambda$-шкалы реактивности.

Из уравнения (9) следует ряд полезных соотношений. Так, если реактор выводится из критического состояния, а затем возвращается в это состояние, то дальнейшее поведение реактора описывается уравнением

$$\nu(t)=-\int_0^t h(t-\tau)\nu(\tau)d\tau.$$

Это уравнение можно использовать для идентификации ядра интеграла репродукции ПЗН $h(t-\tau)$. Найденные таким путём отсчёты функции $h(t)$ пригодны для включения в уравнение (9) и в уравнение реактиметра без восстановления её экспоненциального представления. Экспериментально найденная функция репродукции ПЗН выступает как «эффективная», автоматически учитывающая наличие нескольких делящихся нуклидов и не конкретизирующая число групп запаздывающих нейтронов.

После интегрирования ИРП по частям уравнение (9) принимает вид

$$n(t)=\left[h(t)n_0+\int_0^t n(t-\tau)dh(\tau)+Q(t)\right]/\left[h_0+\alpha(t)-r(t)\right]. \qquad (11)$$

Фигурирующая в знаменателе (11) величина $h_0$ изменяется в интервале от ~ $2c^{-1}$ в тепловом реакторе до ~ $65\cdot10^4c^{-1}$ в реакторе на быстрых нейтронах. С другой стороны, в нормальных эксплуатационных режимах обратный период $|\alpha(t)|<0.1$. В таком случае можно принять $\alpha(t)=0$. Тогда (при нулевом источнике) из (10) следует

$$n(t)=\int_0^t h(t-\tau)dn(\tau)/r(t).$$

Это указывает на быстрое уравнивание скоростей репродукции мгновенных нейтронов и осколков деления в эксплуатационных переходных режимах. Полученное соотношение эквивалентно применяющемуся в проектных расчетах [27] уравнению

$$n(t)=\left[\sum_{j=1}^{J}\lambda_j c_j(t)\right]/\left(\beta-\rho(t)\right),$$

но существенно экономичнее его, поскольку не требует расчёта чисел ПЗН $c_j$.

Для случая перевода реактора (критического или подкритического) с одного стационарного уровня $n_0$ на другой $n_1$ путём ввода-вывода реактивности за некоторое время $T$ уравнение (9) принимает вид

$$n_1-n_0=\left[\int_0^T r(\tau)\cdot n(\tau)d\tau+Q\right]/\left(1+\frac{1}{\Lambda}\sum_{j=1}^{J}\frac{\beta_j}{\lambda_j}\right).$$

Это уравнение может использоваться для градуировки органов регулирования и постановки ряда экспериментальных методик.

## О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЯР

Полуаналитическое решение уравнений (8) в виде интегралов свёртки, использованное для получения уравнения (9), полностью снимает проблему жесткости уравнений (4), (5), преодолению которой всегда уделялось много внимания. Интегральное уравнение (9) решается численно методом квадратур вместе с уравнением для числа нейтронов

$$n(t)=n(0)+\int_0^t \nu(\tau)d\tau.$$

Такое решение оказывается точнее и устойчивее по сравнению с конечно-разностной аппроксимацией уравнений (4), (5) в силу сглаживающего эффекта метода квадратур. Общая расчётная схема имеет вид

$$w_1=n(0),\quad w_k=n(0)+\sum_{l=0}^{k-1}B_{k,l}\nu_l,$$

$$\nu_k=\left[Q_k-\sum_{l=0}^{k-1}A_{k,l}h_{k-l}\nu_l+r_k w_k\right]/[1+h_0A_{k,k}-r_kB_{k,k}],\quad k=1,2,\dots,$$

где $A_{k,l}$, $B_{k,l}$ – некоторые квадратурные коэффициенты.

Нетрудно видеть, что основные затраты приходятся на вычисление интеграла репродукции ПЗН. Аналогично вычисляется ИРП в различных цифровых реализациях реактиметра. При этом можно отметить, что часто приводимая оговорка о необходимости дискретизации ИРП для минимизации затрат памяти ЭВМ является излишней, поскольку иного пути для вычисления рассматриваемых интегралов просто нет. Уравнение реактиметра – «обращённое решение уравнения кинетики» – всегда записывается в том или ином варианте интегральной формы (10) [28]. И для его вывода фактически всегда применяли схему получения уравнения (9), т.е. представление решений уравнений (5), (8) интегралами свёртки. Однако при этом упускали из виду возможность аналогичной записи прямого уравнения (9), хотя такая симметрия унифицирует прямую и обратную задачи динамики ЯР, сводя их к вычислению ИРП. Важно также, что уравнения (9) – (11) не предполагают обязательного представления функции $h(t)$ суммой экспонент, допуская различные методики идентификации этой функции. Однако экспоненциальное представление $h(t)$ удобно при численной реализации этих уравнений (обеспечивая постоянное число операций на шаге) и при анализе передаточных функций, расширяя возможности частотных и шумовых методов.

Начальное условие для уравнения (9) (условие выхода ЯР из стационарного состояния) в общем случае определяется скачками реактивности и интенсивности источника в момент времени $t = 0$: $v(0) = r(0)n(0) + Q(0)$. При этом из уравнения (11) следует, что (в приближении $\alpha(0) = 0$) в этот момент имеет место скачок числа нейтронов: $n(t) \to n^0 = [h_0 n(0) + Q(0)]/[h_0 - r(0)]$, $t \to +0$ при любом поведении реактивности или источника и при любом числе групп запаздывающих нейтронов. Это предельное значение появляется также в решении уравнения (9), записанного для малых времён после выхода из стационарного состояния, когда интеграл репродукции осколков может быть аппроксимирован левым прямоугольником:

$$v(t) = (r(t) - h_0)\cdot n(t) + (h_0 n(0) + Q(t))\cdot 1(t) + n(0)\cdot\delta(t), \tag{12}$$

$\delta(t)$ – дельта-функция; $1(t)$ – функция Хевисайда.

В частности, для случая $Q = 0$ и ввода в начальный момент ступеньки реактивности $r$ решение имеет вид $n(t) = n^0 + rn(0)\cdot\exp[(r - h_0)t]/(r - h_0)$. В силу линейности уравнения (9) уравнение (12) описывает также отклик при малых временах после возмущения по реактивности или источнику в любом нестационарном состоянии ЯР. При этом не требуется обращаться к моделям «элементарного уравнения кинетики», «холодного» реактора, одной группы запаздывающих нейтронов и т.п. Все представляющие интерес ситуации можно рассмотреть на основании уравнения возмущений (12) или непосредственно по исходному уравнению (9), записав его, например, в следующей непрерывно-дискретной форме:

$$v(t) = \left[r(t) - h_0\right]n(t) - \sum_{l=0}^{k-1} h_{k-l}(n_l - n_{l-1}) + h_0 n_{k-1} + Q(t).$$

Во всех случаях реакция на возмущение определяется соотношением величин $r$ и $h_0$, что эквивалентно, разумеется, сопоставлению $\rho$ и $\beta$ при традиционном подходе.

## О ПРИМЕНИМОСТИ И ТОЧНОСТИ ТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ

Уравнения динамики ЯР (4) – (9) следуют из элементарных соображений баланса скоростей процессов без каких-либо предположений о близости реактора к критичности, о «нулевой» мощности реактора, о спектре запаздывающих нейтронов, о пространственно-временном распределении потока нейтронов и т.д. Эти предположения необходимы для традиционного вывода уравнений динамики ЯР на основании различных приближений уравнения переноса или представления о поколениях нейтронов, и никоим образом не выражают условия применимости точечной модели.

Уравнения (4) – (9) как балансные являются полной моделью динамики ЯР при избранной степени детальности и позволяют описать поведение ЯР (в терминах числа нейтронов или их средней концентрации) при тех или иных соотношениях переменных параметров $r(t)$ и $h(t)$. Последние, разумеется, должны быть известны из расчётов или экспериментов, чтобы адекватно описать поведение конкретного реактора. В таком качестве они всегда являются «эффективными параметрами», поскольку и в расчёте, и в эксперименте определяются путем некоторого усреднения или вычисления (измерения) «в характерной точке». В частности, для данной модели может быть решена обратная задача динамики – определение параметров по заданному или наблюдаемому ходу мощности ЯР, т.е. предполагается, что рассматриваемые уравнения изменения числа нейтронов в реакторе описывают также динамику мощности реактора. По этому поводу студентам следует дать необходимые пояснения.

Важно обратить внимание на то, что форму, аналогичную уравнению (9), можно придать и распределённому уравнению переноса:

$$\frac{1}{\upsilon}\psi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=R\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)-\int_0^t\int W(\mathbf{r},\mathbf{v}',t-\tau)\psi(\mathbf{r},\mathbf{v}',\tau)d\mathbf{v}'d\tau+Q, \tag{13}$$

где $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \partial\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)/\partial t$ есть скорость изменения плотности потока нейтронов; оператор репродукции потока $R$ интерпретируется как оператор реактивности, а интеграл репродукции ПЗН содержит ядро

$$W(\mathbf{r},\mathbf{v}',t-\tau)=\sum_j\chi_j(\upsilon)\exp[-\lambda_j(t-\tau)]\cdot\beta_j(\upsilon')\nu_j(\upsilon')\Sigma_{fj}(\mathbf{r},\mathbf{v}').$$

Подобие уравнений (9) и (13) означает, что динамику ЯР всегда можно описать в терминах полного числа нейтронов $n(t)$ или их распределения по фазовому пространству как обусловленную двумя интегральными характеристиками – реактивностью $r(t)$ и функцией репродукции осколков $h(t)$.

По существу уравнение (13) также является «точечным», выражающим баланс скоростей генерации-потери частиц в окрестности точки ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$). И в этой точке можно ввести все параметры, фигурирующие в соотношениях (2). Проблема заключается только в адекватном интегрировании уравнения (13) или локально определённых параметров по фазовым переменным ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$) для согласования с экспериментальными оценками реактивности и ФРП по уравнению (9). Простая структура уравнения (9) позволяет более легко анализировать коллизии такого согласования, связанные с учётом пространственных эффектов и аналога источника [1, 29].

В рамках предложенного варианта изложения динамики ЯР становятся излишними такие понятия, как «коэффициент размножения на мгновенных нейтронах», «критичность на запаздывающих нейтронах» и т.п. Термин «запаздывающие нейтроны» (ЗН) пришёл из ядерной физики, где он используется при описании элементарных стадий процесса деления. При решении задач динамики ЯР этот термин вводит в заблуждение, заставляя предполагать, что ЗН появляются через некоторый промежуток времени после изменения размножающих свойств реактора [17] или, другими словами, что число ПЗН не реагирует мгновенно на изменение реактивности. В действительности традиционные уравнения точечной динамики (5) показывают, что в любой момент времени ЗН пополняют популяцию нейтронов со скоростью

$$\sum_{j=1}^{J}\lambda_j c_j(t),$$

определяемой текущей концентрацией осколков. При этом какая-либо информация о скоростях потери и репродукции ЗН (а также об энергетическом спектре, ценности и т.п.) в уравнениях (4), (5) отсутствует. Скорости выражаются только через число ПЗН и полное количество нейтронов. Поэтому изложение динамики ЯР в терминах запаздывающих нейтронов затушевывает картину процессов, не давая какого-либо «упрощения» [16].

Так, например, применяемый со времён работы Судэка и Кэмпбелла [25] «коэффициент размножения на запаздывающих нейтронах» $k^з = k_{эф}\beta_{эф}$ вовсе не есть отношение чисел ЗН в двух поколениях $n^{з}_{i+1}/n^{з}_{i}$, поскольку отношение численности поколений в популяции одинаково для любой доли этой популяции: $k_{эф} = n^{д}_{i+1}/n^{д}_{i} = \beta_{эф} n^{д}_{i+1}/(\beta_{эф} n^{д}_{i}) = n^{з}_{i+1}/n^{з}_{i}$. Это означает, в частности, что известные преобразования [18 – 20], основанные на замене коэффициента размножения $k_{эф}$ коэффициентом размножения на мгновенных нейтронах $k^{м}_{эф} \equiv k_{эф}(1 - \beta_{эф})$, неправомерны.

Обычно утверждается, что точечная модель динамики (ТМД) является менее точной, чем распределенные модели, поскольку «точечная модель не описывает изменение формы потока нейтронов в переходных процессах» [30]. Однако здесь смешиваются понятия точности (количественной близости), детальности (числа учитываемых элементов системы) и адекватности (структурно-понятийного соответствия). Разумеется, ТМД менее детальна, чем распределённые модели. Но структурно она вполне адекватно выражает баланс скоростей репродукции мгновенных нейтронов и ПЗН. Её валидность – применимость к конкретному реактору – обусловлена точностью задания интегральных параметров реактора – реактивности и функции репродукции ПЗН – и точностью численной реализации. Аналогично, в терминах адекватности, детальности и точности должны характеризоваться и распределённые модели. На эти три понятия и их сопоставление должно постоянно обращаться внимание студентов при изложении вопросов, связанных с моделированием процессов в ЯР и с организацией проектных расчётов.

## О ТЕРМИНОЛОГИИ

Ядерный реактор является типичной динамической системой, т.е. системой, для которой задан закон изменения параметров состояния во времени. Естественно называть уравнения, выражающие указанный закон, уравнениями динамики независимо от их размерности. Поэтому традиционное словосочетание «уравнения точечной кинетики ядерного реактора» уместно исключить из оборота, поскольку оно не отражает ни математическую, ни физическую специфику уравнений динамики ЯР. По своему смыслу термин «кинетика» охватывает статику и динамику. Но статический вариант модели здесь представлен простейшим уравнением баланса

$$-r(t)\cdot n(t) = Q(t)$$

и не даёт большого разнообразия задач. Поэтому уместно акцентировать именно динамический характер рассматриваемых уравнений.

Нет оснований и для использования термина «кинетика» как указания на отсутствие обратных связей в модели по той простой причине, что обратная связь всегда присутствует в динамической системе (и физически, и в математической модели) как взаимозависимость «состояние - скорость изменения состояния». Если же понимать присутствие обратных связей как наличие в модели явных зависимостей реактивности от температуры, мощности, давления и т.д., то, очевидно, задавая подходящим образом зависимость реактивности от времени, можно учесть все факторы влияния на реактивность и в этом смысле отразить всю совокупность обратных связей. Кроме того, добавления уравнений обратных связей не изменяет форму исходных уравнений.

Все параметры модели являются «эффективными», поскольку адекватно отражают процессы деления с точки зрения описания динамики ЯР, но не раскрывают их механизмы. Студенты должны уяснить, что экспериментальная или расчётная оценка подобных параметров всегда опирается на модели определённой степени детальности, на процедуры усреднения или измерения в характерных точках, что, таким образом, всегда даёт только «эффективные», «действующие», «наблюдаемые» значения. Поэтому постоянное употребление эпитета «эффективный» («эффективный коэффициент размножения», «эффективные концентрации предшественников», «эффективные постоянные распада» и т.п.) является излишним.

Согласно уравнениям (4), (5), скорость генерации ПЗН пропорциональна скорости генерации мгновенных нейтронов деления, и в любой момент времени имеет место распад осколков деления, обусловливающий генерацию нейтронов $j$-й группой ПЗН со скоростью $\lambda_j c_j(t)$. Поэтому *в рамках рассматриваемой модели* нет никаких оснований называть такие нейтроны запаздывающими. Более подходящим термином представляется «нейтроны β-распада осколков деления». Термин «запаздывающие нейтроны» заимствован из детального описания механизма деления, но этот механизм в данной модели никоим образом не учитывается.

Традиционно уравнения (4) – (6) трактуются как нелинейные [21] в силу наличия произведения $r(t)\cdot n(t)$. Однако реактивность $r(t)$ понимается здесь как коэффициент, а не как «входная величина». Поэтому фактически указанные уравнения относятся к классу линейных уравнений (с переменными коэффициентами), поскольку удовлетворяют критериям однородности и аддитивности. И поэтому нет необходимости в линеаризации этих уравнений для получения передаточных функций. Соответствующие соотношения получаются путём применения преобразования Лапласа непосредственно к уравнению (9) в предположении постоянства реактивности.

Уравнения (4) – (6) описывают динамику ЯР в терминах интегральных параметров – полного числа нейтронов или средней их концентрации, или мощности реактора. Каких-либо допущений о малых размерах реактора при их выводе не требуется. Поэтому образ точечного ЯР и соответствующее название этих уравнений представляется не вполне уместным. Это ничего не даёт для понимания процессов в ЯР. Более подходящим является название «уравнения динамики в интегральных параметрах», конкретизирующиеся в терминах мощности, реактивности, периода и функции репродукции осколков. При этом следует подчеркнуть, что динамику любого реактора можно описать посредством этих величин, и, более того, именно эти интегральные параметры используются и принимаются во внимание при разработке систем управления и безопасности ЯР.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанная в работе модель динамики ядерного реактора применялась для решения различных задач технического, экспериментального и расчётного плана [31 – 33]. Представляется, что приведённый в работе материал свидетельствует также о её методических преимуществах при изложении ряда разделов динамики ядерных реакторов.

### *Литература*

1. *Казанский Ю.А., Слекеничс Я.В.* Кинетика ядерных реакторов. Коэффициенты реактивности. Введение в динамику. – М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 300 с.

2. *Селезнев Е.Ф.* Кинетика реакторов на быстрых нейтронах. – М.: Наука, 2013. – 239 с.

3. *Bahman Z.* Neutronic Analysis for Nuclear Reactor Systems. – Springer Publ., 2019. – 672 p.

4. *Marguet S.* The Physics of Nuclear Reactors. – Springer Publ., 2017. - 1462 p.

5. *Oka Y.; Suzuki K.* Nuclear Reactor Kinetics and Plant Control. – Springer Publ., 2013. – 305 c.

6. *Карначук В.И.* Системы автоматического выравнивания нейтронного потока в ядерных реакторах. – Томск: Томский политехнический университет, 2009. – 221 с.

7. *Халимончук В.А.* Динамика реактора с распределенными параметрами в исследованиях переходных режимов эксплуатации ВВЭР и РБМК. – К.: Основа, 2008. – 228 с.

8. *Семенов В.К.* Кинетика и регулирование ядерных реакторов. – Иваново: Ивановс-

кий государственный энергетический институт, 2009. – 144 с.

9. *Румянцев Г.Я., Тошинский Г.И.* Физика и динамика ядерных реакторов. – Обнинск: ИАТЭ, 2006. – 202 с.

10. *Ионов В.С.* Распределенная нейтронная динамика активных зон ВВЭР. – М.: ИздАТ, 2005. – 311 с.

11. *Ахиезер А.И., Померанчук И.Я.* Введение в теорию нейтронных мультиплицирующих систем (реакторов). – М.: ИздАТ, 2002. – 368 с.

12. *Юркевич Г.П.* Системы управления энергетическими реакторами. – М.: ЭЛЕКС-КМ, 2001. – 344 с.

13. *Ильченко А.Г.* Переходные и нестационарные процессы в ядерных реакторах. – Иваново: Ивановский государственный энергетический институт, 2000. – 116 с.

14. *Колесов В.Ф.* Апериодические импульсные реакторы. – М.: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1999. – 1032 с.

15. *Колесов В.Ф., Леппик П.А., Павлов С.П., Плютинский В.И., Сабаев Е.Ф., Торлин Б.З., Шевелёв Я.В.* Динамика ядерных реакторов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 518 с.

16. *Саркисов А.А., Пучков В.Н.* Физика переходных процессов в ядерных реакторах. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 264 с.

17. *Бартоломей Г.Г., Бать Г.А., Байбаков В.Д., Алхутов М.С.* Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов. – М.: Энергоиздат. 1982. – 512 с.

18. *Емельянов И.Я., Ефанов А.И., Константинов Л.В.* Научно-технические основы управления ядерными реакторами. – М.: Энергоиздат, 1981. – 360 с.

19. *Lewins J.* Nuclear Reactor Kinetics and Control. – Pergamon Press, 1978. – 275 p.

20. *Горяченко В.Д.* Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1977. – 296 с.

21. *Hetrick D.L.* Dynamics of Nuclear Reactors. – University of Chicago Press, 1971. – 542 p.

22. *Akcasu Z., Lellouche G.S., Shotkin L.M.* Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics. – Academic Press, 1971. – 465 p.

23. *Keepin R.G.* Physics of Nuclear Kinetics. – Addison-Wesley Publ. Co, 1965. – 435 p.

24. *Ash M.* Nuclear Reactor Kinetics. – McGraw Hill, 1965. – 415 p.

25. *Судэк Г., Кэмпбелл Э.* Элементарная теория котла. // Успехи физических наук. – 1950. – Т. 42. – С. 93-156. DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.0042.195009g.0093.

26. *Эйринг Г., Лин С.Г., Лин С.М.* Основы химической кинетики. – М.: Мир, 1983. – 528 с.

27. *Митенков Ф.М., Багдасаров Ю.Е., Букша Ю.К., Востоков В.С., Горбунов В.С., Заец Н.П., Самойлов О.Б., Кузнецов И.А., Козырев В.Д., Ашурко Ю.М., Шейнкман А.Г.* Инженерные методы анализа режимов с естественной циркуляцией в установках типа БН. // Атомная энергия. – 1987. – Т. 62. – Вып. 3. – С. 147-154.

28. *Юферов А.Г.* Реактиметры и измерение реактивности. Свидетельство о государственной регистрации библиографической базы данных № 2016620830, 21 июня 2016 г.

29. *Колесов В.Ф.* Истоки неточностей в реактивности, определяемой с помощью обращенного решения уравнений кинетики. // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. – 2016. – № 21. – Часть 1. – С. 130-153.

30. *Фокин А.Б., Потапенко П.Т.* Методы расчета пространственной кинетики реакторов. // Атомная техника за рубежом. – 1974. – № 12. – С. 3-9.

31. *Юферов А.Г., Ибрагимов Р.Л.* Реактиметр как адаптивный цифровой фильтр. // Атомная энергия. – 2005. – Т. 98. – Вып. 4. – С. 253-260.

32. *Юферов А.Г.* Обобщенная линейная модель для идентификации параметров кинетики ядерного реактора. // Атомная энергия. – 2010. – Т. 108. – Вып. 1. – С. 8-12.

33. *Юферов А.Г.* Квадратурные формулы для интегральных уравнений кинетики и цифровых реактиметров // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2017. – № 2. – С. 93-105.

Поступила в редакцию 26.03.2020 г.

**Автор**

Юферов Анатолий Геннадьевич, доцент, канд. физ.-мат. наук

E-mail: anatoliy.yuferov@mail.ru

UDC 621.039.514.4:621.039.515:621.039.516.2:378

## SOME ISSUES OF TEACHING THE DYNAMICS OF NUCLEAR REACTORS

Yuferov A.G.

Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, NRNU MEPhI

1 Studgorodok, 249040 Obninsk, Kaluga Reg., Russia

ABSTRACT

The article considers a number of methodological issues of teaching the dynamics of nuclear reactors in order to optimize curricula to achieve a closer relationship between courses in theoretical, experimental and computational physics of nuclear reactors by clarifying a number of formulations, simplifying mathematical constructions and rationalizing the conceptual apparatus. Particular attention is paid to the introduction of the basic concepts of the nuclear reactor dynamics, – reactivity, generation times and neutron lifetimes, – based on the simplest balance of generation rates and neutron loss in the fission process. The preference of using reactivity in the $\Lambda$-scale – $r = \rho/\Lambda$ is shown. It is proposed to describe the nuclear reactor dynamics based on a modified form of the integral dynamics equation. In this form, the equation is specified only by the time dependence of reactivity and the integral kernel, i.e., the reproduction function of delayed neutron precursors (DNP). This approach unifies the consideration of direct and inverse problems of dynamics, reducing them to calculating the integral for reproducing the DNPs. In the presence of several fissile nuclides, the kernel of the integral equation is the sum of the corresponding reproduction functions, and the latter do not require generally to be represented by the sum of exponentials. This allows us not to specify the number of groups of delayed neutron emitters and not to introduce simplifying assumptions in situations that have traditionally been considered under the assumption of one group of delayed neutrons and one fissile nuclide. The proposed changes reduce the physical volume of educational materials, but retain their semantic content and allow for more hours in the curricula for in-depth study of a number of pressing issues related to the management and identification of multiplying systems of various types.

**Key words:** nuclear reactor dynamics, teaching methods.

REFERENCES

1. Kazansky Yu.A., Slekenichs Ya.V. *Kinetics of Nuclear Reactors. Reactivity Coefficients. Introduction into Dynamics*. Moscow. NIYaU MIFI Publ., 2012, 300 p. (in Russian).

2. Seleznev E.F. *Kinetics of Fast Neutron Reactors*. Moscow. Nauka Publ., 2013, 239 p. (in Russian).

3. Bahman Z. *Neutronic Analysis for Nuclear Reactor Systems*. Springer Publ., 2019, 672 p.

4. Marguet S. *The Physics of Nuclear Reactors*. Springer Publ., 2017, 1462 p.

5. Oka Y.; Suzuki K. *Nuclear Reactor Kinetics and Plant Control*. Springer Publ., 2013, 305 p.

6. Karnachuk V.I. *Systems of Automatic Leveling of Neutron Flux in Nuclear Reactors*. Tomsk. Tomsk Polytechnic University Publ., 2009. 221 p. (in Russian).

7. Halimonchuk V.A. Reactor Dynamics with Distributed Parameters in Investigations of Transient Operating Modes of VVER and RBMK. Kiev. Osnova Publ., 2008, 228 p. (in Russian).

8. Semenov V.K. *Kinetics and Regulation of Nuclear Reactors*. Ivanovo. Ivanovo State Power Engineering Institute Publ., 2009, 144 p. (in Russian).

9. Rumyantsev G.Ya., Toshinskiy G.I. *Physics and Dynamics of Nuclear Reactors*. Obninsk. IATE Publ., 2006, 202 p. (in Russian).

10. Ionov V.S. *Distributed Neutron Dynamics of the VVER Cores*. Moscow. Izdat Publ., 2005, 311 p. (in Russian).

11. Akhiezer A.I., Pomeranchuk I.Ya. *Introduction in the Theory of Neutron Multiplying Systems* (*Reactors*). Moscow. IzDAT Publ., 2002, 368 p. (in Russian).

12. Yurkevich G.P. *Control Systems for Power Reactors*. Moscow. ELEKS-KM Publ., 2001, 344 p. (in Russian).

13. Ilchenko A.G. *Transient and Unsteady Processes in Nuclear Reactors*. Ivanovo. Ivanovo State Power Engineering Institute Publ., 2000, 116 p. (in Russian).

14. Kolesov V.F. *Aperiodic Impulse Reactors*. Moscow. RFYaTs-VNIIEF Publ., 1999, 1032 p. (in Russian).

15. Kolesov V.F., Leppik P.A., Pavlov S.P., Plyutinsky V.I., Sabaev E.F., Torlin B.Z., Shevelyov Ya.V. *Dynamics of Nuclear Reactors*. Moscow. Energoatomizdat Publ., 1990, 518 p. (in Russian).

16. Sarkisov A.A., Puchkov V.N. *Physics of Transients in Nuclear Reactors*. Moscow: Energoatomizdat Pibl., 1983, 264 p. (in Russian).

17. Bartolomey G.G., Bat G.A., Baibakov V.D., and Alkhutov M.S. *Fundamentals of the Theory and Methods of Calculating Nuclear Power Reactors*. Moscow. Energoizdat Publ., 1982, 512 p. (in Russian).

18. Emelyanov I.Ya., Efanov A.I., Konstantinov L.V. *Scientific and Technical Fundamentals of Nuclear Reactor Control*. Moscow. Energoizdat Publ., 1981, 360 p. (in Russian).

19. Lewins J. *Nuclear Reactor Kinetics and Control*. Pergamon Press, 1978, 275 p.

20. Goryachenko V.D. *Methods for Studying the Stability of Nuclear Reactors*. Moscow. Atomizdat Publ., 1977, 296 p. (in Russian).

21. Hetrick D.L. *Dynamics of Nuclear Reactors*. The University of Chicago Press, 1971, 542 p.

22. Akcasu Z., Lellouche G.S., Shotkin L.M. *Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics.* Academic Press, 1971, 465 p.

23. Keepin G.R. *Physics of Nuclear Kinetics*. Addison-Wesley Pub. Co, 1965, 435 p.

24. Ash M. *Nuclear Reactor Kinetics*. McGraw Hill, 1965, 415 p.

25. Soodak G., Campbell E. *Elementary Pile Theory*. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 1950, v. 42, pp. 93-156; DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.0042.195009g.0093 (in Russian).

26. Eiring G., Lin S.G., Lin S.M. *Fundamentals of Chemical Kinetics*. Moscow. Mir Publ., 1983, 528 p. (in Russian).

27. Mitenkov F.M., Bagdasarov Yu.E., Buksha Yu.K., Vostokov V.S., Gorbunov V.S., Zayets N.P., Samoilov O.B., Kuznetsov I.A., Kozyrev V.D., Ashurko Yu.M., Sheinkman A.G. Engineering methods of analysis of modes with natural circulation in BN type installations. *Atomnaya Energiya*. 1987, v. 62, iss. 3, pp. 147-154 (in Russian).

28. Yuferov A.G. *Reactimeters and Reactivity Measurement*. Certificate of State Registration of *bibliographic database* No. 2016620830, June 21, 2016 (in Russian).

29. Kolesov V.F. Origins of inaccuracies in reactivity determined by inverse solution of kinetic equations. *Proceedings of RFYaTs-VNIIEF*. 2016, no. 21, part 1, pp. 130-153 (in Russian).

30. Fokin A.B., Potapenko P.T. Methods for calculating the spatial kinetics of reactors. *Atomnaya Tekhnika za Rubezhom*. 1974, no. 12, pp. 3-9 (in Russian).

31. Yuferov A.G., Ibragimov R.L. Reactimeter as an Adaptive Digital Filter. *Atomnaya Energiya*. 2005, v. 98, iss. 4, pp. 253-260 (in Russian).

32. Yuferov A.G. Generalized Linear Model for Identification of Nuclear Reactor Kinetics Parameters. *Atomnaya Energiya*. 2010, v. 108, iss. 1, pp. 8-12 (in Russian).

33. Yuferov A.G. Quadrature Formulas for the Integral Equations of Kinetics and Digital Reactimeters. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*. 2017, no. 2, pp. 93-105 (in Russian).

**Author**

Yuferov Anatoly Gennadyevich, Assistant Professor, Cand. Sci. (Phys.-Math.)
E-mail: anatoliy.yuferov@mail.ru