УДК 536.21 DOI 10.26583/npe.2020.1.06

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В *k*-СЛОЙНЫХ ПЛАСТИНЕ И ЦИЛИНДРЕ

В.А. Левченко, М.В. Кащеев, С.Л. Дорохович, А.А. Зайцев
ООО ЭНИМЦ «Моделирующие системы»
249035, г. Обнинск Калужской обл., пр. Ленина, 133

Решена задача определения нестационарного двумерного температурного поля в k-слойных цилиндре и пластине длиной l. В центре данных тел имеется симметрично расположенная щель (пластина) или цилиндрическая полость (цилиндр). Отсутствие щели или полости является частным случаем задачи. В каждом слое действуют источники тепла, зависящие от координат и времени. Начальные температуры в слоях – функции координат. В центре тел выполняется условие симметрии. На границе соприкосновения слоев – идеальный тепловой контакт: непрерывность температур и тепловых потоков. На внешней боковой поверхности и торцах происходит теплообмен по закону Ньютона со средами, температуры которых изменяются во времени по произвольному закону. С помощью геометрического параметра Γ в математической постановке задачи записывается одно дифференциальное уравнение для обоих многослойных тел. Задача в такой постановке решена впервые.
Для решения задачи используется комбинированный метод – сначала с помощью метода конечных интегральных преобразований исключаются дифференциальные операции по продольной координате, а затем полученное уравнение в изображениях решается методом Фурье (разделения переменных), что позволяет свести определение временной зависимости температуры к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Ключевые слова: двумерная нестационарная задача теплопроводности, геометрический параметр, k-слойные пластина и цилиндр, источники тепла, метод конечных интегральных преобразований, метод Фурье, характеристическое уравнение, ядро преобразования, окружающая среда.

ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи, полученное в данной работе как наиболее полное решение, можно считать общим. В литературе приводится большое количество решений частных задач, большинство из которых можно получить из предложенного в статье решения. Это одномерные, двумерные и трехмерные стационарные и нестационарные однослойные задачи [1 –4], одномерные нестационарные двухслойные [1, 5], трехслойные и k-слойные задачи [6 – 8], а также стационарная двумерная k-слойная задача [8]. Отметим, что в большинстве указанных работ температура среды постоянна.

Решение задачи может быть востребовано при детальном исследовании температурного поля в четырехслойном твэле (центральная полость, сердечник, зазор, оболочка), при расчетах технологического оборудования химической промышленности [8] и при исследовании температурных полей в связанных реакторах [9].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В соответствии с изложенным в реферате словесным описанием задачи математическая постановка ее выглядит так. Если отсчитывать температуру $T_i(r, z, t)$ от «ложного нуля» – температуры среды, омывающей боковую поверхность $T_{ck}(t)$, т.е.

$$u_i\,(r, z, t) = T_i\,(r, z, t) - T_{ck}\,(t), \quad i = 1, \ldots, k$$

и ввести масштабы – температурный T_M, линейных размеров r_2 и временной $(r_2/a_1)^2$, то получим следующую математическую формулировку задачи.

Дифференциальное уравнение

$$\chi_i^{-2}\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial R^2} + \frac{\Gamma}{R}\frac{\partial U_i}{\partial R} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial Z^2} + \frac{Q_{vi}}{K_{ci}\chi_i^2} - \chi_i^{-2}\frac{\partial U_{ck}}{\partial \tau}, \tag{1}$$

где $R_i < R < R_{i+1}$; $0 < Z < L$; $i = 1, \ldots, k$; $\tau > 0$.

Начальное условие

$$U_i\,(R, Z, 0) = U_i^0(R, Z); \quad R_i \le R \le R_{i+1}; \quad 0 \le Z \le L; \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Граничные условия

$$\frac{\partial U_1(R_1, Z, \tau)}{\partial R} = 0; \quad 0 \le Z \le L; \quad \tau > 0; \tag{3}$$

$$U_i\,(R_{i+1}, Z, \tau) = U_{i+1}(R_{i+1}, Z, \tau); \quad 0 \le Z \le L; \quad i = 1, \ldots, k-1; \quad \tau > 0; \tag{4}$$

$$\Lambda_i\frac{\partial U_i(R_{i+1}, Z, \tau)}{\partial R} = \Lambda_{i+1}\frac{\partial U_{i+1}(R_{i+1}, Z, \tau)}{\partial R}; \quad 0 \le Z \le L; \quad i = 1, \ldots, k-1; \quad \tau > 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial U_k(R_{k+1}, Z, \tau)}{\partial R} + \mathrm{Bi}_k U_k(R_{k+1}, Z, \tau) = 0; \quad 0 \le Z \le L; \quad \tau > 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial U_i(R, 0, \tau)}{\partial Z} - \mathrm{Bi}_{0i}(U_i(R, 0, \tau) - U_{c0}(\tau)) = 0; \; R_i \le R \le R_{i+1}; \; i = 1, \ldots, k; \; \tau > 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial U_i(R, L, \tau)}{\partial Z} + \mathrm{Bi}_{li}(U_i(R, L, \tau) - U_{cl}(\tau)) = 0; \; R_i \le R \le R_{i+1}; \; i = 1, \ldots, k; \; \tau > 0. \tag{8}$$

В выражениях (1) – (8) используются следующие обозначения: $\chi_i^2 = a_i^2/a_1^2$; $a_i^2 = \lambda_i/(c_i\rho_i)$; $U_i = (T_i - T_{ck})/T_M$; $T_M = \langle q_{v1}\rangle^0 r_2^2/\lambda_1$; $\tau = a_1^2 t/r_2^2$; $K_{ci} = (c\rho)_i/(c\rho)_1$; $Q_{vi} = q_{vi}/\langle q_{v1}\rangle^0$; $U_{ck} = T_{ck}/T_M$; $R_i = r_i/r_2$; $Z = z/r_2$; $L = l/r_2$; $U_i^0 = (T_i^0 - T_{ck})/T_M$; $\Lambda_i = \lambda_i/\lambda_1$; $\mathrm{Bi}_k = \alpha_k r_2/\lambda_k$; $\mathrm{Bi}_{0i} = \alpha_0 r_2/\lambda_i$; $\mathrm{Bi}_{li} = \alpha_l r_2/\lambda_i$; $U_{c0} = (T_{c0} - T_{ck})/T_M$; $U_{cl} = (T_{cl} - T_{ck})/T_M$. При этом a^2 – коэффициент температуропроводности, м^2·с$^{-1}$; Bi – число Био; c – изобарная теплоёмкость, Дж/(кг·К); L – безразмерная длина; Q_{vi} – безразмерная мощность источников тепла; q_{vi} – мощность источников тепла, Вт/м^3; $\langle q_{v1}\rangle^0$ – средняя по объёму мощность источников тепла в первом слое в начальный момент времени ($t = 0$); R – безразмерная поперечная координата; r – поперечная координата, м; T_i, T_i^0 – текущая и начальная температуры, К; T_{c0}, T_{cl} – температуры сред, омывающих нижнюю и верхнюю поверхности, К; τ – безразмерное время; t – время, с; U_i – безразмерная температура; u_i – относительная температура, К; Z – безразмерная продольная координата; z – продольная координата, м; α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К); λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); ρ – плотность, кг/м^3; $\Gamma = 0$ – пластина; $\Gamma = 1$ – цилиндр; V – объём, м^3;

$$\langle q_{v1}\rangle = V^{-1}\int_0^V q_{v1}(r,z,0)dV.$$

Задачу (1) – (8) решим комбинированным методом – сначала с помощью метода конечных интегральных преобразований [10] исключим дифференциальные операции по Z, а затем полученное уравнение в изображениях решим методом Фурье (разделения переменных) [11], сведя определение временной зависимости температуры к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Следуя работе [10], для исключения дифференциальной операции по Z найдем ядро прямого преобразования.

Вспомогательная функция $\overline{K}_i(Z)$ для нахождения ядра должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \overline{K}_i(Z)}{\partial Z^2} + \mu_i^2 \overline{K}_i(Z) = 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ k \tag{9}$$

с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial \overline{K}_i(0)}{\partial Z} - \mathrm{Bi}_{0i}\overline{K}_i(0) = 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial \overline{K}_i(L)}{\partial Z} + \mathrm{Bi}_{Li}\overline{K}_i(L) = 0. \tag{11}$$

Отметим, что надчёркивание в (9) – (11) и далее обозначает величины, относящиеся к методу конечных интегральных преобразований.

Решением уравнения (9) с граничным условием (10) с точностью до произвольной постоянной, которая сокращается при нормировке, является выражение

$$\overline{K}_i(Z) = \cos\mu_i Z + (\mathrm{Bi}_{0i}/\mu_i)\sin\mu_i Z. \tag{12}$$

Второе граничное условие (11) даёт трансцендентное характеристическое уравнение для определения собственных чисел μ_{im} ($m = 1, 2, \ldots$)

$$\mathrm{tg}\,\mu_i L = \mu_i(\mathrm{Bi}_{0i} + \mathrm{Bi}_{Li}) / (\mu_i^2 - \mathrm{Bi}_{0i}\mathrm{Bi}_{Li}). \tag{13}$$

Каждому собственному значению μ_{im} соответствует собственная функция (12), и ядро прямого преобразования $K_{im}(Z)$ будет отличаться от (12) только нормирующим делителем C_{im}, т.е.

$$K_{im}(Z) = \overline{K}_{im}(Z) / C_{im}, \tag{14}$$

где

$$C_{im} = \int_0^L \overline{K}_{im}^2(Z)dZ = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{Bi}_{0i}^2}{\mu_{im}^2}\right) + \frac{(\mu_{im}^2 + \mathrm{Bi}_{0i}\mathrm{Bi}_{Li})(\mathrm{Bi}_{0i} + \mathrm{Bi}_{Li})}{2\mu_{im}^2(\mu_{im}^2 + \mathrm{Bi}_{Li}^2)}. \tag{15}$$

Выражение для нормирующего делителя (15) получено с использованием уравнения (13).

Осуществляя прямое преобразование задачи (2) – (8) с ядром (14) в интервале $0 \le Z \le L$, получим дифференциальное уравнение в изображениях

$$\frac{1}{\chi_i^2}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial R^2} + \frac{\Gamma}{R}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial R} - \mu_{im}^2\overline{U}_i + \frac{\overline{f}(\tau)}{\chi_i^2} + \frac{\overline{Q}_{vi}(R,\tau)}{\chi_i^2 K_{ci}} - \overline{N}_{0i} + \overline{N}_{Li}, \tag{16}$$
$$R_i < R < R_{i+1}; \quad i = 1,\ldots,k; \quad \tau > 0$$

с краевыми условиями

$$\overline{U}_i(R,0)=\overline{U}_i^{\,0}(R), \quad i=1,\ \ldots,\ k; \tag{17}$$

$$\frac{\partial \overline{U}_1(R_1,\tau)}{\partial R}=0, \quad \tau>0; \tag{18}$$

$$\overline{U}_i(R_{i+1},\tau)=\overline{U}_{i+1}(R_{i+1},\tau), \quad i=1,\ \ldots,\ k-1; \quad \tau>0; \tag{19}$$

$$\Lambda_i\frac{\partial \overline{U}_i(R_{i+1},\tau)}{\partial R}=\Lambda_{i+1}\frac{\partial \overline{U}_{i+1}(R_{i+1},\tau)}{\partial R}, \quad i=1,\ \ldots,\ k-1; \quad \tau>0; \tag{20}$$

$$\frac{\partial \overline{U}_k(R_{k+1},\tau)}{\partial R}+\mathrm{Bi}_k\overline{U}_k(R_{k+1},\tau)=0, \quad \tau>0, \tag{21}$$

где

$$\overline{U}_i=C_{im}^{-1}\int_0^L\overline{K}_{im}(Z)U_idZ; \quad \overline{f}(\tau)=-A_{im}\frac{\partial U_{ck}(\tau)}{\partial\tau};$$

$$\overline{Q}_{vi}(R,\tau)=C_{im}^{-1}\int_0^L\overline{K}_{im}(Z)Q_{vi}(R,Z,\tau)dZ;$$

$$A_{im}=(C_{im}\mu_{im})^{-1}(\sin\mu_{im}L+\mu_{im}^{-1}\cdot\mathrm{Bi}_{0i}(1-\cos\mu_{im}L)).$$

Величины $\overline{N}_{0i}$ и $\overline{N}_{li}$ учитывают неоднородность граничных условий (7), (8) и равны

$$\overline{N}_{0i}=-(\mathrm{Bi}_{0i}/C_{im})\cdot U_{c0}(\tau);$$
$$\overline{N}_{li}=(\mathrm{Bi}_{li}/C_{im})\cdot[\cos\mu_{im}L+(\mathrm{Bi}_{0i}/\mu_{im})\cdot\sin\mu_{im}L]\cdot U_{cl}(\tau).$$

Решение задачи (16) – (21) будем искать в виде ряда

$$\overline{U}_i(R,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{U}_n(\tau)X_{in}(R), \quad R_i<R<R_{i+1}, \quad i=1,\ \ldots,\ k, \quad \tau>0, \tag{22}$$

где $\overline{U}_n(\tau)$ – функции, подлежащие определению; $X_{in}(R)$ – собственные функции, которые в соответствии с методом Фурье являются решением задачи Штурма – Лиувилля [11]:

дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2X_i}{\partial R^2}+\frac{\Gamma}{R}\frac{\partial X_i}{\partial R}+\nu^2X_i=0 \tag{23}$$

с однородными граничными условиями, которые следуют из условий (18) – (21),

$$\frac{\partial X_1(R_1)}{\partial R}=0; \quad X_i(R_{i+1})=X_{i+1}(R_{i+1}), \quad i=1,\ldots,k-1;$$

$$\Lambda_i\frac{\partial X_i(R_{i+1})}{\partial R}=\Lambda_{i+1}\frac{\partial X_{i+1}(R_{i+1})}{\partial R}, \quad i=1,\ldots,k-1; \tag{24}$$

$$\frac{\partial X_k(R_{k+1})}{\partial R}+\mathrm{Bi}_kX_k(R_{k+1})=0,$$

где ν – положительный параметр, который будет определен ниже.

Решением уравнения (23) является выражение

$$X_i(R)=C_i\varphi_i(R)+D_i\psi_i(R), \quad i=1,\ \ldots,\ k, \tag{25}$$

где $\varphi_i(R)$ и $\psi_i(R)$ – линейно независимые решения.

Вид этих функций для пластины и цилиндра приведен в табл. 1, где $J_0(x)$ и $Y_0(x)$

– функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно.

Таблица 1

Линейно независимые решения уравнения (23) для пластины и цилиндра

Геометрия тела	Γ	$\varphi_i(R)$	$\psi_i(R)$
Пластина	0	$\cos(\nu R)$	$\sin(\nu R)$
Цилиндр	1	$J_0(\nu R)$	$Y_0(\nu R)$

Подставив решение (25) в граничные условия (24), получим систему $2k$ линейных алгебраических однородных уравнений для определения $2k$ произвольных констант интегрирования C_i и D_i. Согласно теории линейных алгебраических однородных уравнений, система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю [12]. Это дополнительное условие приводит к трансцендентному уравнению для определения собственных чисел ν_n ($n = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{vmatrix} \varphi_1'(R_1) & \psi_1'(R_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1(R_2) & \psi_1(R_2) & -\varphi_2(R_2) & -\psi_2(R_2) & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_1\varphi_1'(R_2) & \Lambda_1\psi_1'(R_2) & -\Lambda_2\varphi_2'(R_2) & -\Lambda_2\psi_2'(R_2) & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_{k-1}(R_k) & \psi_{k-1}(R_k) & -\varphi_k(R_k) & -\psi_k(R_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \Lambda_{k-1}\varphi_{k-1}'(R_k) & \Lambda_{k-1}\psi_{k-1}'(R_k) & -\Lambda_k\varphi_k'(R_k) & -\Lambda_k\psi_k'(R_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \varphi_k^*(R_{k+1}) & \psi_k^*(R_{k+1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

В приведенном определителе для краткости введены обозначения

$$\varphi^*_k(R_{k+1}) = \mathrm{Bi}_k\,\varphi_k(R_{k+1}) + \varphi'_k(R_{k+1}); \qquad \psi^*_k(R_{k+1}) = \mathrm{Bi}_k\,\psi_k(R_{k+1}) + \psi'_k(R_{k+1}).$$

Определитель в (26) весьма разрежен, поскольку содержит большое количество упорядоченно расположенных нулевых элементов, поэтому для упрощения его вычисления целесообразно применить метод Лапласа [12]. Разлагая определитель $2k$-го порядка по первым $k - 1$ (k четное) или по первым k (k нечетное) строкам, его вычисление можно свести к вычислению двух определителей $(k - 1)$-го и двух определителей $(k + 1)$-го порядков (k четное) или четырех определителей k-го порядка (k нечетное).

Уравнение (26) имеет бесконечное множество корней $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n < \ldots$.

Каждому значению ν_n соответствуют собственные функции $X_{in}(R)$, определяемые с точностью до произвольной постоянной, которая сокращается при нормировке. Функции $X_{in}(R)$ и $X_{ij}(R)$ попарно ортогональны с весом R^Γ на отрезке $[R_i, R_{i+1}]$. Условием ортогональности функций на отрезке $[R_1, R_{k+1}]$ является следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{k} K_{ci} \int_{R_i}^{R_{i+1}} X_{in}(R) X_{ij}(R) R^\Gamma dR = \begin{cases} C_n, & n = j, \\ 0, & n \neq j; \end{cases}$$
$$C_n = \sum_{i=1}^{k} K_{ci} \int_{R_i}^{R_{i+1}} X_{in}{}^2(R) R^\Gamma dR. \quad (27)$$

Разложим функции $K_{ci}{}^{-1}\overline{Q}_{vi}(R,\tau)$, $\overline{U}_i{}^0(R)$ и 1 в ряды по собственным функциям $X_{in}(R)$:

$$K_{ci}{}^{-1}\overline{Q}_{vi}(R,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}_n(\tau) X_{in}(R); \quad (28)$$

$$\overline{U}_i{}^0(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n{}^0 X_{in}(R); \quad (29)$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_{in}(R). \quad (30)$$

Умножение обеих частей равенств (28) – (30) на $K_{ci}X_{ij}(R)\,R^{\Gamma}$, интегрирование по R от R_i до R_{i+1} и суммирование по всем слоям каждого из полученных выражений в левых и правых частях равенств с использованием условия ортогональности собственных функций (27) даёт

$$\begin{gathered}\bar{q}_n(\tau)=\frac{1}{C_n}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{R_i}^{R_{i+1}}\bar{Q}_{vi}(R,\tau)X_{in}(R)R^{\Gamma}dR;\\ \bar{U}_n{}^0(\tau)=\frac{1}{C_n}\sum_{i=1}^{k}K_{ci}\int\limits_{R_i}^{R_{i+1}}\bar{U}_i{}^0(R)X_{in}(R)R^{\Gamma}dR;\\ B_n=\frac{1}{C_n}\sum_{i=1}^{k}K_{ci}\int\limits_{R_i}^{R_{i+1}}X_{in}(R)R^{\Gamma}dR.\end{gathered}\tag{31}$$

Подставив (22), (28), (30) в (16) и учитывая (23), получим сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{d\bar{U}_n}{d\tau}+\chi_i{}^2(\mu_{im}{}^2+\nu_n{}^2)\bar{U}_n(\tau)-\bar{q}_n(\tau)-B_n[\bar{f}(\tau)-\chi_i{}^2(\bar{N}_{0i}-\bar{N}_{li})]\}X_{in}(R)=0.\tag{32}$$

Сумма бесконечного числа слагаемых равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Следовательно, из (32) имеем дифференциальное уравнение для определения $\bar{U}_n(\tau)$:

$$\frac{d\bar{U}_n}{d\tau}+\chi_i{}^2(\mu_{im}{}^2+\nu_n{}^2)\bar{U}_n(\tau)=\bar{q}_n(\tau)+B_n[\bar{f}(\tau)-\chi_i{}^2(\bar{N}_{0i}-\bar{N}_{li})]\tag{33}$$

с начальным условием

$$\bar{U}_n(0)=\bar{U}_n{}^0,\tag{34}$$

которое следует из (22), (17) и (29).

Решением задачи (33), (34), полученным методом вариации произвольной постоянной, является выражение

$$\begin{gathered}\bar{U}_n(\tau)=\exp[-\chi_i{}^2(\mu_{im}{}^2+\nu_n{}^2)\tau]\times\\ \times\{\bar{U}_n{}^0+\int\limits_0^{\tau}[\bar{q}_n(\tau')-B_n(A_{im}\frac{\partial U_{ck}(\tau')}{\partial\tau'}+\chi_i{}^2(\bar{N}_{0i}-\bar{N}_{li}))]\exp[\chi_i{}^2(\mu_{im}{}^2+\nu_n{}^2)\tau']d\tau'\}\end{gathered}$$

и, следовательно, (см. (22)) решение задачи (16) – (21) с учетом (25) примет окончательный вид

$$\begin{gathered}\bar{U}_i(R,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\chi_i{}^2(\mu_{im}{}^2+\nu_n{}^2)\tau]\cdot\{\bar{U}_n{}^0+\int\limits_0^{\tau}[\bar{q}_n(\tau')-B_n(A_{im}\frac{\partial U_{ck}(\tau')}{\partial\tau'}+\\ +\chi_i{}^2(\bar{N}_{0i}-\bar{N}_{li}))]\exp[\chi_i{}^2(\mu_{im}{}^2+\nu_n{}^2)\tau']d\tau'\}\cdot[C_{in}\varphi_{in}(R)+D_{in}\psi_{in}(R)].\end{gathered}\tag{35}$$

Осуществляя обратное преобразование [15] с учётом выражений (12) и (35), получаем решение задачи (1) – (8):

$$\begin{gathered}U_i(R,Z,\tau)=\\ =\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\mu_{im}Z+\mu_{im}{}^{-1}\mathrm{Bi}_{0i}\sin\mu_{im}Z)[C_{in}\varphi_{in}(R)+D_{in}\psi_{in}(R)]\exp[-\chi_i{}^2(\mu_{im}{}^2+\nu_n{}^2)\tau]\times\\ \times\{\bar{U}_n{}^0+\int\limits_0^{\tau}[\bar{q}_n(\tau')-B_n(A_{im}\frac{\partial U_{ck}(\tau')}{\partial\tau'}+\chi_i{}^2(\bar{N}_{0i}-\bar{N}_{li}))]\exp[\chi_i{}^2(\mu_{im}{}^2+\nu_n{}^2)\tau']d\tau'\}.\end{gathered}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена двумерная нестационарная задача теплопроводности в k-слойных пластине и цилиндре при общих краевых условиях.

Решение задачи может быть востребовано в ядерной энергетике, в том числе при исследовании аварийных ситуаций, в которых температура среды изменяется во времени, а также при расчётах технологического оборудования химической промышленности.

В настоящее время численными методами можно решить практически любую задачу, но при проведении верификации без аналитического решения не обойтись.

Кроме того, полученное решение поставленной задачи имеет большое теоретико-методическое значение.

Литература

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа,1967. – 600 с. Электронный ресурс: http://bookre.org/reader?file=454814 (дата доступа 09.12.2019).

2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.

3. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

4. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 688 с.

5. *Смирнов М.С.* Задача теплопроводности для системы двух тел. В кн. «Тепло- и массообмен в процессах испарения». – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – С. 153-155.

6. *Смирнов М.С.* Температурное поле в трехслойной стенке при граничных условиях четвертого рода. В кн. «Тепло- и массообмен в капиллярно-пористых телах». – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1957. С. 17-20.

7. *Булавин П.Е., Кащеев В.М.* Решение неоднородного уравнения теплопроводности для многослойных тел. // ИФЖ. – 1964. – Т. VII. – № 9. – С. 71-77.

8. *Туголуков Е.Н.* Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований: Учебное пособие. Тамбов. Изд-во Тамб. техн. ун-та. 2005. 116 с.

9. *Гулевич А.В., Дьяченко П.П., Зродников А.В., Кухарчук О.Ф.* Связанные реакторные системы импульсного действия. – М.: Энергоатомиздат, 2003. – 360 с.

10. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 730 с.

11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Изд. 7 стереот. – М.: МГУ, 2004. – 800 с. ISBN 5-211-04843-1.

12. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. Изд. 15 стереот. – С-Пб.: Лань, 2006. – 432 с. ISBN 978-5-8114-0521-3.

Поступила в редакцию 11.12.2019 г.

Авторы

Левченко Валерий Алексеевич, директор, канд. техн. наук
E-mail: lev@ssl.obninsk.ru

Кащеев Михаил Васильевич, в.н.с., д-р техн. наук
E-mail: MihailKasheev@ssl.obninsk.ru

Дорохович Сергей Леонидович, главный инженер, канд. техн. наук
E-mail: SDorohovich@ssl.obninsk.ru

Зайцев Алексей Александрович, начальник лаборатории, канд. техн. наук
E-mail: alexeyzaycev@ssl.obninsk.ru

UDC 536.21

SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF NON-STATIONARY THERMAL CONDUCTIVITY IN A *k*-LAYER PLATE AND CYLINDER

Levchenko V.A., Kascheev M.V., Dorokhovich S.L, Zaytsev A.A.

Company «Simulation Systems Ltd.» («SSL» LLC)
133 Lenin avenue, Obninsk, Kaluga region, 249035 Russia

ABSTRACT

The problem of determining a two-dimensional non-stationary temperature field in a k-layer cylinder and plate of length l is solved. There is a symmetrically located gap (plate) or cylindrical cavity (cylinder) in the center of these bodies. The absence of a gap or cavity is a special case of the problem. In each layer, there are heat sources, depending on the coordinates and time.

The initial temperature of the layers is a function of the coordinates. In the center of the bodies the symmetry condition is fulfilled. At the boundary of contact of the layers – ideal thermal contact: continuity of temperatures and heat flows. On the outer side surface and ends, heat exchange occurs according to Newton's law with environments whose temperatures change over time according to an arbitrary law. With the help of the geometric parameter Γ in the mathematical formulation of the problem, one differential equation for both multilayer bodies is written. The problem in this statement is solved for the first time.

To solve the problem, a combined method is used: first, by using the method of finite integral transformations, differential operations on the longitudinal coordinate are excluded, and then the resulting equation in the images is solved by the Fourier method (separation of variables), bringing the determination of the time dependence of the temperature to the solution of an ordinary differential equation of first order.

Key words: two-dimensional non-stationary heat conduction problem, geometrical parameter, k-layer plate and cylinder, heat sources, method of finite integral transformations, Fourier method, characteristic equation, kernel of transformation, environment.

REFERENCES

1. Lykov A.V. *Theory of Thermal Conductivity*. Moscow. Vysshaya Shkola Publ., 1967. 600 p. Avaiable at: http://bookre.org/reader?file=454814 (accessed Dec 09, 2019) (in Russian).

2. Kartashov E.M. *Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids*. Textbook. Moscow. Vysshaya Shkola Publ., 2001. 550 p. (in Russian).

3. Butkovskij A.G. *Characteristics of Systems with Distributed Parameters*. Moscow. Nauka Publ., 1979. 224 p. (in Russian).

4. Budak B.M., Samarskij A.A., Tihonov A.N. *Collection of Problems in Mathematical Physics*. Moscow. Nauka Publ., 1980. 688 p. (in Russian).

5. Smirnov M.S. *The Problem of Thermal Conductivity for a System of Two Bodies*. In the book «Heat and mass transfer in evaporation processes». Moscow. Akademiya nauk SSSR Publ., 1958, pp. 153-155 (in Russian).

6. Smirnov M.S. *Temperature Field in a Three-Layer Wall under Boundary Conditions of the Fourth Kind*. In the book «Heat and mass transfer in capillary-porous bodies». Moscow-Leningrad. Gosenergoizdat Publ., 1957, pp. 17-20 (in Russian).

7. Bulavin P.E., Kascheev V.M. The solution of the inhomogeneous heat conduction equation for multilayered bodies. *Inzhenerno-Fizicheskij Zhurnal*. 1964, v. VII, no. 9, pp. 71-77 (in Russian).

8. Tugolukov E. N. *Solution of Heat Conduction Problems by the Method of Finite Integral Transformations*. Textbook. Tambov. TGTU Publ., 2005. 116 p. (in Russian).

9. Gulevich A.V., D'yachenko P.P., Zrodnikov A.V., Kuharchuk O.F. *Coupled Reactor Systems of Pulse Action*. Moscow. Energoatomizdat Publ., 2003. 360 p. (in Russian).

10. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Differential Equations of Mathematical Physics*. Moscow. FIZMATGIZ Publ., 1962. 730 p. (in Russian).

11. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of Mathematical Physics*. Ed. 7, stereo. Moscow. MGU Publ., 2004, 800 p. ISBN 5-211-04843-1 (in Russian).

12. Kurosh A.G. *Higher Algebra Course*. Ed. 15, stereo. Saint-Petersburg. Lan' Publ., 2006. 432 p. ISBN 978-5-8114-0521-3. (in Russian).

Authors

Levchenko Valery Alekseevich, Director, Cand. Sci. (Engineering)
E-mail: lev@ssl.obninsk.ru

Kascheev Mikhail Vasilievich, Leading Researcher, Dr. Sci. (Engineering)
E-mail: MihailKasheev@ssl.obninsk.ru

Dorokhovich Sergey Leonidovich, Chief Engineer, Cand. Sci. (Engineering)
E-mail: SDorohovich@ssl.obninsk.ru

Zaytsev Aleksey Aleksandrovich, Head of the Laboratory, Cand. Sci. (Engineering)
E-mail: alexeyzaycev@ssl.obninsk.ru