УДК 621.039.515:621.039.516.2:621.039.514.4

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИКИ И ЦИФРОВЫХ РЕАКТИМЕТРОВ

А.Г. Юферов
Обнинский институт ядерной энергетики НИЯУ МИФИ
249040, Калужская обл., г. Обнинск, Студгородок, 1

Целью работы является вывод квадратурных формул для уравнений кинетики ядерного реактора в форме интегральных уравнений Вольтерры второго рода и уравнений реактиметра в форме интеграла свертки, ядром которого является функция распада предшественников запаздывающих нейтронов (ПЗН), представленная в негрупповом виде. Целесообразность перехода к интегральным уравнениям кинетики обусловлена задачей унификации прямой (расчет динамики мощности) и обратной (вычисление текущей реактивности) задач кинетики реактора. В результате решение сводится к вычислению интеграла запаздывающих нейтронов. Это исключает источник несовпадения расчетных и экспериментальных оценок реактивности, обусловленный различием вычислительных алгоритмов прямой и обратной задач. Представлена общая схема преобразования различных приближений уравнения переноса, позволяющая описать вклад запаздывающих нейтронов посредством интегралов свертки без использования уравнений динамики концентраций ПЗН. Такое преобразование уменьшает размерность модели, упрощает программную реализацию, снимает проблему жесткости дифференциальных уравнений кинетики, обеспечивает устойчивость вычислений. Размерность модели сохраняется в случае учета нескольких делящихся нуклидов. Интегральная форма уравнений допускает использование в квадратурных формулах отсчетов экспериментальной функции распада, которая может быть идентифицирована в эксплуатационных режимах ядерного реактора и сохранена поточечно в негрупповой форме без разложения в сумму экспонент. Это исключает необходимость решения нелинейной задачи идентификации групповых параметров запаздывающих нейтронов и повышает адекватность моделирования. Получен ряд квадратурных формул для вычисления интеграла запаздывающих нейтронов и описаны соответствующие алгоритмы цифрового реактиметра и численного моделирования кинетики реактора.

Ключевые слова: динамика ЯР, точечная кинетика, реактивность, реактиметр, интегральные уравнения, квадратурные формулы.

ВВЕДЕНИЕ

В физике ядерных реакторов большое внимание уделяется сопоставлению и согласованию расчетных и экспериментальных оценок реактивности [1 – 4]. Такое сопоставление характеризует точность и адекватность нейтронно-физических расчетов в задачах проектирования, эксплуатации и обеспечения ядерной безопасности

ЯЭУ. Однако, как известно [5], в расчетных комплексах используются дифференциальные уравнения для описания динамики предшественников запаздывающих нейтронов (ПЗН), а экспериментальная оценка реактивности основана на различных вариантах обращенного уравнения кинетики, в котором, как нетрудно показать, вклад ПЗН описывается интегралом свертки. Соответственно, в первом случае для вычислений используются различные схемы решения дифференциальных уравнений [6 – 8], во втором – простейшие квадратурные формулы [9]. Различие математических моделей является одной из причин несовпадения расчетных и экспериментальных результатов. Для исключения этого фактора целесообразно выполнить унификацию вычислительных моделей для обеспечения тождественности схем решения прямой (расчет хода мощности) и обратной (вычисление текущей реактивности) задач нейтронной динамики ядерного реактора. Поскольку измерение реактивности возможно только через вычисление интеграла, то в расчетных моделирующих комплексах оценка реактивности также должна выполняться на основе интегральных уравнений с использованием квадратур, аналогичных применяемым в цифровом реактиметре. Точнее, уравнения должны быть преобразованы к интегральной форме, а последующая дискретизация должна выполняться одинаковым образом и в прямой, и в обратной задаче с использованием как традиционных квадратур, так и других известных подходов к решению интегральных уравнений [10, 11].

В работе описана общая схема преобразования различных приближений уравнения переноса для учета вклада запаздывающих нейтронов посредством интеграла свертки. Предложенная унификация сводит прямую и обратную задачи кинетики к вычислению интеграла запаздывающих нейтронов (ИЗН). Получен ряд квадратурных формул для вычисления ИЗН и описаны соответствующие расчетные схемы для реализации цифрового реактиметра и численного моделирования кинетики реактора. Найдено условие устойчивости вычислений.

Интегродифференциальные и интегральные уравнения нейтронной кинетики давно используются при моделировании ядерных реакторов [6 – 8, 12 – 26]. Рассмотренная в работе унификация прямой и обратной задач кинетики ЯР дает, как представляется, ряд усовершенствований в дополнение к традиционным подходам, а именно:

– уменьшается размерность модели, в модели фигурируют только наблюдаемые величины;

– становится возможным использование в качестве ядра интегрального уравнения непосредственно отсчетов экспериментальной функции распада ПЗН;

– переход к интегральным уравнениям снимает проблему жесткости дифференциальных уравнений кинетики ЯР;

– обеспечивается возможность получения интервальных оценок реактивности на основе верхних и нижних интегральных сумм [27];

– стандартные схемы метрологического анализа [28], основанные на уравнениях свертки, становятся применимы для анализа погрешностей реактиметра [29].

УНИФИКАЦИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ЯР

Интегральное представление источника запаздывающих нейтронов в нестационарном уравнении переноса хорошо известно [17, 30] и записывается на основании представления об экспоненциальном характере распада предшественников запаздывающих нейтронов в следующей форме (здесь и далее все обозначения стандартные):

$$Q^{D}(\mathbf{r},\mathbf{v},\tau)=\int_{0}^{t}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},\tau)\sum_{j=1}^{J}\chi_{j}\beta_{j}\lambda_{j}e^{-\lambda_{j}(t-\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\lambda_{j}c_{j}(\mathbf{r},0)\cdot e^{-\lambda_{j}t}. \quad (1)$$

Слагаемые интеграла (1) являются решениями уравнений динамики концентраций ПЗН в соответствующих группах

$$\lambda_j c_j(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial c_j(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \int \beta_j(\upsilon')\nu_j(\upsilon')\Sigma_{fj}(\mathbf{r},\mathbf{v}')\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}', \qquad (2)$$

так что фактически эти уравнения могут быть исключены из расчетных схем нестационарного уравнения переноса, поскольку как таковая динамика концентраций ПЗН специального интереса не представляет. Процедуру исключения опишем для нестационарного уравнения переноса, представленного в общей форме:

$$\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t} = R\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t) - \sum_j \chi_j(\upsilon)\frac{\partial c_j(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \qquad (3)$$

Здесь изменение концентраций ПЗН учитывается вторым слагаемым, а оператор R объединяет все прочие процессы и интерпретируется как оператор реактивности. Такое уравнение получается путем замены скорости генерации запаздывающих нейтронов $\lambda_j c_j$, фигурирующей в традиционной форме уравнения переноса, выражением для $\lambda_j c_j$ из уравнения (2).

Начальные концентрации предшественников $c_j(\mathbf{r},0)$ определяются из уравнений (2) в предположении стационарного состояния реактора, т.е. при $\partial c_j/\partial t = 0$. Поэтому удобно ввести в уравнения (2) переменную $s_j \equiv \partial c_j/\partial t$, для которой эти уравнения принимают форму баланса ускорений процессов распада (генерации) предшественников:

$$\frac{\partial s_j(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\lambda_j s_j(\mathbf{r},t) + \int \beta_j(\upsilon')\nu_j(\upsilon')\Sigma_{fj}(\mathbf{r},\mathbf{v}')\psi(\mathbf{r},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}',$$

где $\psi(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \equiv \partial\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)/\partial t$ – скорость изменения плотности потока нейтронов. Начальное условие здесь становится нулевым, $s_j(\mathbf{r},0) \equiv 0$, и обусловливает следующий вид решения:

$$s_j(\mathbf{r},t) = \int_0^t e^{-\lambda_j(t-\tau)}\left[\int \beta_j(\upsilon')\nu_j(\upsilon')\Sigma_{fj}(\mathbf{r},\mathbf{v}')\psi(\mathbf{r},\mathbf{v}',\tau)d\mathbf{v}'\right]d\tau.$$

В результате снимается задача расчета начального распределения предшественников запаздывающих нейтронов и исключается соответствующий источник погрешностей.

Подстановка $s_j \equiv \partial c_j/\partial t$ в уравнение переноса (3) приводит последнее к форме

$$\frac{1}{\upsilon}\psi(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = R\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t) - I_{\text{зн}}(\mathbf{r},t) + Q \qquad (4)$$

с начальным условием $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \upsilon(R\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0)+Q)$. Вклад запаздывающих нейтронов в уравнении переноса (4) представлен интегралом запаздывающих нейтронов (ИЗН)

$$I_{\text{зн}}(\mathbf{r},t) = \int_0^t \int W(\mathbf{r},\mathbf{v}',t-\tau)\psi(\mathbf{r},\mathbf{v}',\tau)d\mathbf{v}'d\tau, \qquad (5)$$

ядро которого

$$W(\mathbf{r},\mathbf{v}',t-\tau) = \sum_j \chi_j(\upsilon)e^{-\lambda_j(t-\tau)}\beta_j(\upsilon')\nu_j(\upsilon')\Sigma_{fj}(\mathbf{r},\mathbf{v}').$$

Описанная процедура замены переменных применима для исключения уравнений динамики концентраций ПЗН в любых приближениях уравнения переноса. В частности, она приводит систему дифференциальных уравнений точечной кинетики к системе интегральных уравнений для мощности реактора и скорости изменения мощности:

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_0^t h(t-\tau)(\cdot)d\tau & r(t) \\ \int_0^t (\cdot)d\tau & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q(t) \\ n(0) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Здесь реактивность дана в Λ-шкале: $r = \rho/\Lambda = 1/\Lambda - 1/l$. В этой шкале реактивность имеет смысл относительной скорости процессов на мгновенных нейтронах: $r(t) \equiv v_{\text{мн}}(t)/n(t)$ и может непосредственно сравниваться с выражаемой обратным периодом $\alpha(t) = v(t)/n(t)$ относительной скоростью изменения мощности реактора за счет всех процессов. Это в определенной степени упрощает решение известной проблемы организации контроля ЯЭУ «по периоду или по реактивности» [31].

Процедура вывода интегрального уравнения для скорости изменения мощности аналогична преобразованиям, выполняемым при традиционном выводе уравнения реактиметра (обращенного решения уравнений кинетики). Здесь уравнение реактиметра получается из первого уравнения (6) очевидным образом без применения обычно привлекаемых преобразований Лапласа [17, 32]:

$$r(t) = \alpha(t) + \frac{1}{n(t)}\int_0^t h(t-\tau)dn(\tau) + Q(t)/n(t). \tag{7}$$

После интегрирования по частям уравнение (7) принимает вид

$$r(t) = \alpha(t) + h(0) - \frac{1}{n(t)}\left[h(t)n(0) + \int_0^t n(t-\tau)dh(\tau) + Q(t) \right], \tag{8}$$

где $h(0) = \beta_{\text{эфф}}/\Lambda$; $g(\tau) = dh(\tau)/d\tau$. Для эксплуатационных режимов, когда, как правило, $h(0) >> \alpha(t)+Q(t)/n(t)$ и интервал наблюдения $[0, t]$ превышает время спада функции $h(t)$, уравнение (8) принимает вид

$$r(t) = \frac{\beta_{\text{эфф}}}{\Lambda} - \frac{1}{n(t)}\int_0^t g(t-\tau)n(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Во всех случаях процедуры решения и прямой, и обратной задач кинетики ЯР унифицируются, поскольку сводятся к вычислению интеграла запаздывающих нейтронов. При этом уравнения (8), (9) предпочтительнее для численной реализации, поскольку время спада функции $g(\tau) = dh(\tau)/d\tau$, фигурирующей в этих уравнениях, примерно в три раза меньше, чем время спада функции $h(t)$. С другой стороны, идентификацию функции $h(t)$ удобнее выполнять на основе уравнения (7).

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛА ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ НЕЙТРОНОВ

Ядро ИЗН в уравнениях (5), (6) – это (с точностью до коэффициента $1/\Lambda$) функция распада предшественников запаздывающих нейтронов, обычно представляемая в экспоненциальной форме

$$h(t) = \frac{\beta_{\text{эфф}}}{\Lambda}\sum_{j=1}^{J}\alpha_j \exp(-\lambda_j t).$$

Вместо экспоненциального представления ядра допустима любая аппроксимация или поточечное табличное хранение экспериментальной кривой распада [33]. Такой подход повышает адекватность модели, упрощает процедуры адаптации реактиметра, но требует вычисления ИЗН по схемам, в которых ядро представлено конечной совокупностью отсчетов экспериментальной кривой распада или ее производной.

Рассмотрим дискретную форму ИЗН применительно к уравнениям (8, 9), полагая, что функция $g(t)$ представлена L+1 отсчетом (т.е. $g(t) = 0$ при $t > t_L$):

$$I_k = \sum_{l=0}^{L} c_{k,k-l} g_{k-l} n_l = \sum_{l=k-L}^{L} c_{k,k-l} g_{k-l} n_l = \sum_{l=0}^{L} c_{k,l} g_l n_{k-l}. \qquad (10)$$

Вычисление интеграла свертки в форме (10) – это классическая задача цифровой обработки сигналов, рассматривавшаяся, в частности, в [34 – 36]. Однако соответствующие подходы практически не использовались для вычисления ИЗН в уравнении цифрового реактиметра или при решении прямой задачи кинетики ЯР.

В случае обычно применяемой формулы трапеций квадратурные коэффициенты в (10) равны $c_{k,0} = T_{k-1}/2$; $c_{k,l} = (T_{k-l}+T_{k-l-1})/2$; $l = 1, \ldots, L-1$; $c_{k,L} = T_{k-L}/2$, если шаг интегрирования $T_l = t_{l+1}-t_l$ является переменным. Видно, что оценка по формуле трапеций получается усреднением оценок, сделанных по формулам левых и правых прямоугольников, которые могут использоваться для интервальной оценки решения, например, при вычислении реактивности [27].

Аналогично формуле трапеций квадратурная формула Симпсона описывает простое усреднение трех оценок, полученных методом левых, правых и центральных прямоугольников:

$$S_1 = T_{l2}(f_l + f_{l+1})/2, \quad S_2 = T_{l2} f_{l+1}, \quad S_3 = T_{l2}(f_{l+1} + f_{l+2})/2, \quad T_{l2} = t_{l+2} - t_l,$$

причем S_2 есть оценка интеграла на интервале $[t_l, t_{l+2}]$ методом среднего прямоугольника, а S_1, S_3 являются попарным усреднением оценки S_2 с оценками интеграла методами левого и правого прямоугольников. Применительно к вычислению свертки (10) в случае переменного шага интегрирования формула Симпсона на l-м отрезке интерполяции ($l = 0, 2, 4, \ldots, L-2$) имеет вид

$$S_l = \frac{T_{i-2}+T_{i-1}}{6}\left(\frac{2T_{i-2}-T_{i-1}}{T_{i-2}} f_{i-2} + \frac{\left(T_{i-2}+T_{i-1}\right)^2}{T_{i-2}T_{i-1}} f_{i-1} + \frac{2T_{i-1}-T_{i-2}}{T_{i-1}} f_i\right),$$
$$i = k-l, \quad f_i = g_{k-i} n_i.$$

Для применения квадратуры Симпсона число отсчетов L+1 должно быть нечетным. Для исключения этого затруднения используем указанную выше интерпретацию квадратур как формул усреднения по элементарным отрезкам. В общем случае это приводит к формуле [37]

$$S^l_i = (\mathbf{q}^l_i)^T \mathbf{W}_l^{-1} \mathbf{f}_l, \qquad (11)$$

дающей оценку интеграла на i-м элементарном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k-1$ по информации, относящейся к отрезку интерполяции $T_{l,\, l+J} = [t_l, t_{l+1}, \ldots, t_{l+J}]$, $l = \max(0, i+1-J), \ldots, \min(i, k-J)$, охватывающему данный элементарный отрезок, т.е. по распределению узлов $[t_l, t_{l+1}, \ldots, t_{l+J}]$ и вектору значений подынтегральной функции $\mathbf{f}_l = (f(t_{l+m}))^T$, $m = 0, \ldots, J$.

Матрица $\mathbf{W}_l$ и вектор $\mathbf{q}^l_i$ вычисляются в локальных координатах $x = t-t_l$ l-го отрезка интерполяции.

Элементы матрицы $w^l_{jm} = w_j(x_i)$, $x_i = t_i-t_l$ – значения базисных функций интерполяционной формулы

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^l_j w_j(x),$$

вычисленные в указанных узлах, а элементы вектора $\mathbf{q}^l_i$ – интегралы от базисных функций по i-му элементарному отрезку

$$q_j^l = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_j(x)dx.$$

Конкретные квадратурные формулы получаются из (11) путем усреднения по тому или иному сочетанию $L(i)$ отрезков интерполяции, покрывающих i-й элементарный отрезок

$$S_i \approx \Big(\sum_{l=\max(0,i+1-J)}^{\min(i,k-J)} (\mathbf{q}^l{}_i)^T \mathbf{W}_l^{-1} f_l \Big) / L(i).$$

Для квадратурной формулы Симпсона на отрезке $T_{l,l+2} = [t_l, t_{l+1}, t_{l+2}]$ матрица

$$\mathbf{W}_l^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{1}{t_{l,l+2}} + \frac{1}{t_l}\right) & \left(\frac{1}{t_{l+1}} + \frac{1}{t_l}\right) & \left(\frac{1}{t_{l,l+2}} - \frac{1}{t_{l+1}}\right) \\ \frac{1}{t_l t_{l,l+2}} & -\frac{1}{t_l t_{l+1}} & \frac{1}{t_{l+1} t_{l,l+2}} \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

где индексация используется в следующем смысле: $x_\alpha = t_{\alpha+1} - t_\alpha$; $x_{\alpha,\beta} = t_\beta - t_\alpha$. В данном случае i-й элементарный отрезок (кроме начального и конечного) принадлежит только двум отрезкам интерполяции: (i–1)-му и i-му, так что усредненная оценка интеграла на i-м элементарном отрезке равна

$$S_i = ((\mathbf{q}^{i-1}{}_i)^T \mathbf{W}_{i-1}{}^{-1} \mathbf{f}_{i-1} + (\mathbf{q}^i{}_i)^T \mathbf{W}_i{}^{-1} \mathbf{f}_i)/2; \quad i = 1, \ldots, m-2, \qquad (13)$$

где векторы интегралов от базисных функций равны

$$\mathbf{q}^i{}_i = x_i\,[1 \quad (x_i/2) \quad (x_i^2/3)]^T,$$

$$\mathbf{q}^{i-1}{}_i = x_{i-1,i+1}\,[1 \quad (x_{i-1,i+1}/2) \quad (x_{i-1,i+1}{}^2/3)]^T - x_{i-1,i}\,[1 \quad (x_{i-1,i}/2) \quad (x_{i-1,i}{}^2/3)]^T,$$

а индексация аналогична принятой в формуле (12).

При постоянном шаге интегрирования $x_i = T$ матрица значений базисных функций в узлах одинакова для всех отрезков интерполяции:

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 1; & 1/T; & 1/T^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix},$$

а векторы интегралов от базисных функций по элементарным отрезкам равны соответственно $\mathbf{q}^i{}_i = T[1 \ (T/2) \ (T^2/3)]^T$ и $\mathbf{q}^{i-1}{}_i = T[1 \ (3T/2) \ (7T^2/3)]^T$. В результате оценка (13) принимает вид $S_i = T(-f_{i-1} + 13f_i + 13f_{i+1} - f_{i+2})/24$. В отличие от стандартной схемы интегрирования методом Симпсона применение этой формулы не требует определенной кратности числа узлов. Если нет оснований для выбора конкретных значений подынтегральной функции вне полного интервала интегрирования $[t_{k-L}, t_k]$, то на конечном элементарном отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ следует применить оценку по левому отрезку интерполяции $S_{k-1} = T(-f_{k-2} + 8f_{k-1} + 5f_k)/12$, а на начальном отрезке $[t_{k-L}, t_{k-L+1}]$ –по правому отрезку интерполяции $S_0 = T(5f_0 + 8f_1 - f_2)$. В таком случае, применяя на остальных элементарных отрезках $[t_i, t_{i+1}]$; $i = k-L+1, \ldots, k-2$, оценку (13), получим полную квадратурную формулу для отрезка $[t_{k-L}, t_k]$:

$$S_{k-L,k} = \frac{T}{24}\left[9f_{k-L} + 28f_{k-L+1} + 23f_{k-L+2} + 23f_{k-2} + 28f_{k-1} + 9f_k\right] + T\sum_{i=k-L+3}^{k-3} f_i.$$

Приведем конкретные варианты цифровой реализации уравнения реактиметра (7), определяемые выбором квадратурных формул.

1. Уравнение реактиметра при вычислении ИЗН методом трапеций

$$r_k = \alpha_k\left(1+\frac{T}{2}h_0\right)+\frac{T}{n_k}\sum_{l=1}^{k-1}h_l v_{k-l}-\frac{Q}{n_k}.$$

2. Уравнение реактиметра со скользящим интегрированием по формуле Симпсона

$$r_k = \alpha_k(1+\frac{5T}{12}h_0)+\frac{T}{12n_k}(13h_1v_{k-1}+12\sum_{l=2}^{k-3}h_l v_{k-l}+$$
$$+11h_{k-2}v_2+15h_{k-1}v_1+4h_kv_0)-\frac{Q}{n_k},\quad k=4,5,6,\ldots$$

или, для фиксированного числа отсчетов функции распада ПЗН,

$$r_k=\left(1+\frac{5T}{12}h_0\right)\alpha_k+\left(\frac{13}{12}\cdot\frac{T}{n_k}\right)h_1v_{k-1}+\frac{T}{n_k}\sum_{l=2}^{L}h_l v_{k-l}-\frac{Q}{n_k}.$$

3. Уравнение реактиметра в случае интегрирования методом Ньютона

$$r_k=\alpha_k+\frac{3T}{8n_k}(h_{k-1}v_1+\frac{28}{9}h_{k-2}v_2+\frac{23}{9}h_{k-3}v_3+\sum_{l=3}^{k-4}h_l v_{k-l}+$$
$$+\frac{23}{9}h_2v_{k-2}+\frac{28}{9}h_1v_{k-1}+h_0v_k)-\frac{Q}{n_k},\quad k=1,2,\ldots$$

Для фиксированного числа отсчетов функции распада уравнение принимает вид

$$r_k=\left(1+\frac{3T}{8}h_0\right)\alpha_k+\left(\frac{7}{6}\cdot\frac{T}{n_k}\right)h_1v_{k-1}+\left(\frac{23}{24}\cdot\frac{T}{n_k}\right)h_2v_{k-2}+\frac{3T}{8n_k}\sum_{l=3}^{L}h_l v_{k-l}-\frac{Q}{n_k}.$$

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИКИ

Дискретные аналоги уравнений (6) имеют вид

$$v_k=-\sum_{l=0}^{k}(a_{k,l}h_{k-l})v_l+r_kn_k+Q_k,\quad n_k=n_0+\sum_{l=0}^{k}b_{k,l}\cdot v_l, \tag{14}$$

откуда следует общая схема численного решения

$$\begin{gathered} w_1\equiv n_0,\qquad w_k=n_0+\sum_{i=0}^{k-1}b_{k,l}v_l,\\ v_k=d_k(Q_k-\sum_{l=1}^{k-1}a_{k,l}h_{k,l}v_l+r_kw_k),\quad n_k=w_k+b_{k,k}v_k,\quad k=1,2,3,\ldots \end{gathered} \tag{15}$$

где коэффициент $d_k = (1 + a_{k,k}h_0 - r_kb_{k,k})^{-1}$. Здесь и далее полагается, что расчет ведется для случая старта из стационарного состояния реактора, так что $v_0 = r_0n_0 + Q_0$. Это начальное условие позволяет описать в рамках одной расчетной схемы любой сценарий изменения мощности или реактивности [12, 33]. В прикладных задачах интерес представляют и мощность, и период реактора $p=n/v$, так что расчет по алгоритму (15) представляется наиболее естественным. Дальнейшая детализация определяется выбором конкретных квадратур.

Для подавления накопления ошибок коэффициент d_k должен быть меньше единицы. В подкритическом реакторе это всегда имеет место. В надкритическом реакторе должно выполняться условие на величину вводимой реактивности $r_k < (a_{k,k}/b_{k,k})\cdot h_0$. Это соотношение указывает, что целесообразно использовать свой тип квадратурной формулы для каждого из уравнений (14). Так, если $b_{k,k} = 0$, то $r_k < \infty$, т.е. ограничение на вводимую реактивность отсутствует в случае применения для расчета мощности открытой квадратурной формулы. Эта схема имеет место, когда, например, для расчета мощности используется формула левых прямоугольников, а для расчета скорости – функция правых прямоугольников:

$$d_k = (1 + T_{k-1}h_0)^{-1}, \quad nk = n_{k-1} + T_{k-1}v_{k-1},$$

$$v_k = d_k(Q_k + r_k n_k - \sum_{l=1}^{k-1} T_{l-1} h_{k-l} v_l), \quad k = 1,2,\ldots$$

Применяя формулу Симпсона и усреднение по двум отрезкам интерполяции, которым в данном случае может принадлежать элементарный отрезок, получим для расчета мощности квадратурную формулу вида

$$n_k = n_0 + \frac{T}{12}\left(4v_0 + 15v_1 + 11v_2 + 12\sum_{l=3}^{k-2} v_l + 13v_{k-1} + 5v_k\right), \quad k \geq 4.$$

Если по аналогичной формуле вычислять и интеграл запаздывающих нейтронов, то общий алгоритм (15) конкретизируется следующим образом:

$$w_k = n_0 + \frac{T}{12}\left(15v_1 + 11v_2 + 12\sum_{l=3}^{k-2} v_l + 13v_{k-1}\right), \quad d_k = \left(1 + 5T(h_0 - r_k)/12\right)^{-1},$$

$$v_k = d_k(Q_k - \frac{T}{12}(15h_{k,1}v_1 + 11h_{k,2}v_2 + 12\sum_{l=3}^{k-2} h_{k,l}v_l + 13h_{k,k-1}v_{k-1}) + r_k w_k),$$

$$n_k = w_k + \frac{5T}{12}v_k, \quad k = 4,5,6,\ldots$$

с условием подавления ошибок $r_k < h_0$.

Если ИЗН вычислять по формуле трапеций, то получим расчетную схему

$$w_k = n_0 + \frac{T}{12}\left(15v_1 + 11v_2 + 12\sum_{l=3}^{k-2} v_l + 13v_{k-1}\right),$$

$$v_k = \frac{Q_k - \frac{T}{2}\sum_{l=1}^{k-1} h_{k,l}v_l + r_k w_k}{\left(1 + T(6h_0 - 5r_k)/12\right)}, \quad n_k = w_k + \frac{5T}{12}v_k, \quad k = 4,5,6,\ldots$$

с более слабым, чем в предыдущей схеме, условием подавления ошибок $r_k < 1.2h_0$. Это снова подтверждает целесообразность использования несовпадающих типов квадратурных формул в уравнениях (6).

ВЫВОДЫ

1. Предложена модель кинетики ядерного реактора в форме системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода для мощности и скорости изменения мощности, унифицирующая прямую и обратную задачи кинетики путем сведения их к вычислению интеграла запаздывающих нейтронов.

2. Получен ряд квадратурных формул для ИЗН в случае негруппового представления функции распада ПЗН и приведены соответствующие уравнения цифрового реактиметра.

3. Описана общая схема численной реализации предложенной модели. Конкре-

тизация алгоритма выполнена для случаев использования ряда популярных квадратурных формул.

4. Для пошагового применения квадратурных формул, требующих определенной кратности числа узлов интерполяции, предложен алгоритм скользящего интегрирования. Получены соответствующие квадратурные формулы применительно к вычислению ИЗН.

6. Указаны условия подавления ошибок при интегрировании.

Примером реализации предложенных алгоритмов могут служить результаты работ [27, 29, 33]. Однако всевозможные сочетания типов квадратур, используемых для дискретизации уравнений модели, а также разные варианты усреднения в схемах скользящего интегрирования приводят к многочисленным вариантам численной реализации, требующим дальнейшего анализа и сравнения по точности и количеству операций. Необходимо выполнить такое сравнение и с другими известными алгоритмами моделирования кинетики ЯР.

Литература

1. Рекомендации по сопоставлению рассчитанной и измеренной реактивности при обосновании ядерной безопасности реакторных установок типа ВВЭР. / Методический документ. – ФГУ НТЦ ЯРБ. 2011. – 21 с.

2. *Ионов В.С.* Распределенная нейтронная динамика активных зон ВВЭР. – М.: ИздАТ, 2005. – 311 с.

3. *Селезнев Е.Ф.* Кинетика реакторов на быстрых нейтронах. – М.: Наука, 2013. – 239 с.

4. *Зизин М.Н.* Методы расчета нейтронно-физических характеристик быстрых реакторов. – М.: НИЦ «Курчатовский институт», 2014. – 178 с.

5. *Зизин М.Н.* Формы представления параметров запаздывающих нейтронов при расчете тестовой модели BN600_IAEA. Доступно на сайте http://www.atominfo.ru/newsj/q0464.htm.

6. Computing Methods in Reactor Physics. Ed.: H. Greenspan, C. N. Kelber and D. Okrent. – N.Y.: Gordon and Breach, 1968. 589 p.

7. *Hetrick D. L.* Dynamics of Nuclear Reactors. – University of Chicago Press, 1971. – 542 p.

8. *Колесов В.Ф.* Апериодические импульсные реакторы. – РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1999. – 1032 с.

9. *Могильнер А.И., Фокин Г.Н., Чайка Ю.В., Кузнецов Ф.М.* Применение малых ЭВМ для измерения реактивности // Атомная энергия. – 1974. – Т. 36. – Вып. 5. – С. 358-361.

10. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.

11. Numerical solution of Integral equations. – N.Y.: Plenum Press, 1990. – 430p.

12. *Юферов А.Г.* Библиография по разработкам реактиметров и методам измерения реактивности в ФЭИ. Обзор ФЭИ-295. – М.: ЦНИИАтоминформ, 2003. – 39 с.

13. *Schmid P.* A basic integral equation of reactor kinetics. Proc. 2nd Intern. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy. – Geneva, 1958. – Iss. 11. – 277 p.

14. *Lewins J.* On the General Solution of the Reactor Kinetic Equations // Nucl. Sci. and Eng. – Vol. 11. – № 1. – P. 97.

15. *Adler F.T.* Reactor kinetics: integral equation formulation // Journal of Nuclear Energy Parts A/B. – 1961. – Vol. 15. – No. 2-3. – PP. 81-85.

16. *Масленников М. В.* Об одном численном методе решения уравнений кинетики реактора // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – Т. 1. – № 3. – С. 470-480.

17. *Keepin R.G.* Physics of Nuclear Kinetics. – Addison-Wesley Pub. Co, 1965. – 435 p.

18. *Ash M.* Nuclear Reactor Kinetics. – McGraw Hill, 1965. – 415 p.

19. *Вахромеева В.В.* Метод решения уравнений кинетики реактора. Отчет ФЭИ ТР-741, № 4325, 1965. – 16 с.

20. *Рогожин Ю.А.* Интегральный метод решения уравнений точечной кинетики ядерных реакторов. Отчет ФЭИ ТР-837, № 5365, 1969. – 29 с.

21. *Pettus W. G., Snioow N. L.* A direct integral formulation of point reactor kinetics // Journal of Nuclear Energy. – 1972. – Vol. 26. – PP. 489-490.

22. *Гулевич А.В., Кухарчук О.Ф.* Применение интегральной модели нейтронной кинетики к расчету многозонных размножающих систем. Препринт ФЭИ-2129, 1990.

23. *Нечепуренко Ю.М., Шишков Л.К.* Об определении реактивности на основе обращенного уравнения точечной кинетики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42. – № 9. – С. 1394-1398.

24. *Quintero-Leyva B.* On the numerical solution of the integro-differential equation of the point kinetics of nuclear reactors as an ODE // Annals of Nuclear Energy. – 2009. – Vol. 36. – No. 8. – PP. 1280-1284.

25. *Li H., Chen W., Luo L., Zhu Q.* A new integral method for solving the point reactor neutron kinetics equations // Annals of Nuclear Energy. – 2009. – Vol. 36. – No. 4. – PP. 427-432.

26. *Давиденко В.Д., Зинченко А.С., Харченко И.К.* Интегральные нестационарные уравнения переноса нейтронов для расчетов кинетики ядерных реакторов методом Монте-Карло. // ВАНТ. Серия: Физика ядерных реакторов. – 2015. – Вып. 1. – С. 11-16.

27. *Юферов А.Г., Ибрагимов Р.Л.* Интервальная оценка реактивности. // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2010. – №3. – С. 3-9.

28. *Земельман М.А., Тронова И.М.* Методический материал по применению ГОСТ 8.009-84 «ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений» // Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений. – М.: Изд-во стандартов,1985. – С. 43-132.

29. *Юферов А.Г.* Дисперсионное уравнение реактиметра // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2016. – №3. – С. 30-41.

30. *Bell G.I., Glasstone S.* Nuclear reactor theory. N.Y.: Van Nostrand Reinhold Co., 1970, 619 p.

31. *Борисенко В.И.* Что необходимо определять: период или реактивность реактора? // Проблеми безпеки атомних електростанцій і Чорнобиля. – 2010. – Вип. 13. – С. 8-18.

32. *Бриккер И.Н.* Обращенное решение уравнений кинетики ядерного реактора. // Атомная энергия. – 1966. – Т. 21. – Вып. 1. – С. 9-13.

33. *Юферов А.Г.* К задаче идентификации интегральных уравнений кинетики. // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2005. – № 4. – С. 25-34.

34. *Kuo B.C.* Digital Control Systems. – N.Y.: Holt, Rinehart and Winston Inc., 1980. – 730 pp.

35. *Кузин Л.Т.* Расчет и проектирование дискретных систем управления. – М.: Машгиз, 1962. – 684 с.

36. *Быков В.В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Советское радио, 1971. – 328 с.

37. *Юферов А.Г.* Квадратурные формулы скользящего интегрирования // Труды Международного симпозиума «Вопросы оптимизации вычислений (ВОВ-XXXIII)». – Киев: Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2007. – С. 319-320.

Поступила в редакцию 14.12.2016 г.

Автор

Юферов Анатолий Геннадьевич, зав. лабораторией, канд. физ.-мат. наук
E-mail: anatoliy.yuferov@mail.ru

UDC 621.039.515:621.039.516.2:621.039.514.4

QUADRATURE FORMULAS FOR INTEGRAL EQUATIONS OF KINETICS AND FOR DIGITAL REACTIMETERS

Yuferov A.G.

Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, National Research Nuclear University «MEPhI»

1 Studgorodok, Obninsk, Kaluga reg., 249040 Russia

ABSTRACT

The aim of work is the derivation of quadrature formulas for a kinetic equations nuclear reactor in the form of Volterra integral equations of the second kind and for equation of a reactimeter in the form of integral convolution, the core of which is a function of decay of the delayed neutron precursors (DNP) in the nongroup form. The expediency of the transition to integral equations is caused by the unification of the direct (calculation of power dynamics) and the reverse (calculation of current reactivity) tasks of reactor kinetics. As a result, the solution reduces to the calculation of the delayed neutrons integral. This eliminates the source of discrepancy calculated and experimental evaluations of reactivity due to the difference in computational algorithms direct and inverse problems. The paper describes a general scheme to convert different transport equation approximations to describe the contribution of delayed neutrons by a integral convolution without using dynamics of the DNP concentration. This conversion reduces the dimension of the model, simplifies the software implementation, eliminates the stiffness problem of differential equations of the kinetics, provides stability of calculations. The dimension of the model is preserved in the case of several fissile nuclides. The integral form of the equations admits in quadrature formulas the use the samples of experimental function of the decay, which can be identified in the operating conditions of a nuclear reactor and stored by pointwise in the non-group form – without expansions in sum of the exponents. This eliminates the need to address the nonlinear problem of identification of the group parameters of delayed neutrons and increases the adequacy of modeling. In work is obtained a series of quadrature formulas for the calculation of the delayed neutrons integral and describes the corresponding algorithms of digital reactimeter and the numerical simulation of the reactor kinetics.

Key words: dynamics of nuclear reactor, point kinetics, reactivity, reactimeter, integral equations, quadrature formulas.

REFERENCES

1. Recommendations for comparing the calculated and measured reactivity for substantiation of nuclear safety of reactor VVER-type plants. Moscow. NTC YaRB Publ., 2010. 21 p. (in Russian).

2. Ionov V.S. *Raspredelennaya neytronnaya dinamika aktivnyh zon VVER* [Distributed neutron dynamics of the active zones of the VVER]. Moscow. IzdAT Publ., 2005. 311 p. (in Russian).

3. Seleznev E.F. *Kinetika reaktorov na bystryh neytronah* [Fast Breeder Reactor Kinetics]. Moscow. Nauka Publ., 2013. 239 p. (in Russian).

4. Zizin M.N. *Metody raschyota neytronno-fizicheskih harakteristik bystryh reaktorov* [Methods of calculating neutron-physical characteristics of fast reactors]. Moscow. NIC «Kurchatovskiy institut» Publ., 2014. 178 p. (in Russian).

5. Zizin M.N. The presentation of delayed neutron parameters in the calculation test model BN600_IAEA. Available at: http://www.atominfo.runewsjq0464.htm. (in Russian).

6. Computing Methods in Reactor Physics. Ed.: H. Greenspan, C.N. Kelber and D. Okrent. N.Y. Gordon and Breach, 1968 . 589 p.

7. Hetrick D. L. Dynamics of Nuclear Reactors. University of Chicago Press, 1971. 542 p.

8. Kolesov V.F. *Aperiodicheskie impulsnye reaktory* [Aperiodic pulse reactors]. Sarov. RFNC-VNIIEF Publ., 1999. 1032 p. (in Russian).

9. Mogilner A.I., Fokin G.N., Chayka Yu.V., Kuznetsov F.M. The use of small computers for measuring reactivity. *Atomnaya energiya*. 1974, v. 36, iss. 5, pp. 358-361 (in Russian).

10. Verlan A.F., Sizikov V.S. *Integral'nye uravneniya: Metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: Methods, algorithms, programs]. Kiev. Naukova dumka Publ., 1986. 544 p. (in Russian).

11. Numerical solution of integral equations. N.Y.: Plenum Press, 1990. 430p.

12. Yuferov A.G. *Bibliografiya po razrabotkam reaktimetrov i metodam izmereniya reaktivnosti v FEI* [Bibliography on development of the reactivity meters and methods of the reactivity measurements in IPPE]. Obzor FEI-295. Moscow. CNIIAtominform Publ., 2003. 39 p. (in Russian).

13. Schmid P. A basic integral equation of reactor kinetics. Proc. 2nd Intern. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy. Geneva, 1958, iss. 11, 277 p.

14. Lewins J. On the General Solution of the Reactor Kinetic Equations. *Nucl. Sci. and Eng.,* v. 11, no. 1, p. 97.

15. Adler F.T. Reactor kinetics: integral equation formulation. *Journal of Nuclear Energy. Parts A/B*. 1961, v. 15, no. 2-3, pp. 81-85.

16. Maslennikov M. V. On one numerical method of solution of the equations of reactor kinetics. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*. 1961, v. 1, no. 3, pp. 470-480 (in Russian).

17. Keepin R.G. Physics of Nuclear Kinetics. Addison-Wesley Pub. Co, 1965. 435 p.

18. Ash M. Nuclear Reactor Kinetics. McGraw Hill, 1965. 415 p.

19. Vakhromeeva V.V. The method of solving the equations of reactor kinetics. Otchet FEI TR-741, № 4325, 1965. 16 p. (in Russian).

20. Rogozhin Yu.A. An integral method for solving the equations of point kinetics of nuclear reactors. Otchet FEI TR-837, № 5365, 1969. 29 p. (in Russian).

21. Pettus W. G., Snioow N. L. A direct integral formulation of point reactor kinetics. *Journal of Nuclear Energy*. 1972, v. 26, pp. 489-490.

22. Gulevich A.V., Kukharchuk O.F. The use of an integrated model of neutron kinetics to the calculation of multiplying multizone systems. Preprint FEI-2129, 1990 (in Russian).

23. Nechepurenko Yu.M., Shishkov L.K. Determination of reactivity based on the inverse point kinetics equation. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*. 2002, v. 42, no. 9, pp. 1394-1398 (in Russian).

24. Quintero-Leyva B. On the numerical solution of the integro-differential equation of the point kinetics of nuclear reactors as an ODE. *Annals of Nuclear Energy* 2009, v. 36, no. 8, pp. 1280-1284.

25. Li H., Chen W., Luo L., Zhu Q. A new integral method for solving the point reactor neutron kinetics equations. *Annals of Nuclear Energy*, 2009, v. 36, no. 4, pp. 427-432.

26. Davidenko V.D., Zinchenko A.S., Kharchenko I.K. Integral non-stationary neutron transport equations for calculation of the kinetics of nuclear reactors by Monte Carlo method. *VANT. Ser. Fizika yadernykh reaktorov*. 2015, iss. 1, pp. 11-16 (in Russian).

27. Yuferov A.G., Ibragimov R.L. Interval estimation of reactivity. *Izvestiya vuzov. Yadernaya energetika*. 2010, no. 3, pp. 3-9 (in Russian).

28. Zemelman M.A., Tronova I.M. *Metodicheskiy material po primeneniyu GOST* 8.009-84 «*GSI. Normiruemye metrologicheskie kharakteristiki sredstv izmereniy*». *Normirovanie i ispolzovanie metrologicheskikh kharakteristik sredstv izmereniy* [Methodological

material for use GOST 8.009-84 «GSI. Standardized metrological characteristics of measuring instruments». Standardization and use of metrological characteristics of measuring instruments]. Moscow. Izdatelstvo Standartov Publ., 1985, pp. 43-132 (in Russian).

29. Yuferov A.G. Reactimeter dispersion equation. *Nuclear Energy and Technology* (2016). Available at: http://dx.doi.org/10.1016/j.nucet (2016.11.04).

30. Bell G.I., Glasstone S. Nuclear reactor theory. N.Y.: Van Nostrand Reinhold Co., 1970, 619 p.

31. Borisenko V. I. What must be determined: the period or the reactivity of the reactor? *Problemy bezpeki atomnykh elektrostantsyj i Chornobylya.* 2010, iss. 13, pp. 8-18 (in Russian).

32. Brikker I.N. The inverted decision of a nuclear reactor kinetics equations. *Atomnaya energiya*. 1966, v. 21, iss. 1, pp. 9-13 (in Russian).

33. Yuferov A.G. On the problem of identification of integral equations of the kinetics. *Izvestiya vuzov. Yadernaya energetika*. 2005, no. 4, pp. 25-34 (in Russian).

34. Kuo B.C. Digital Control Systems. N.Y. Holt, Rinehart and Winston Inc., 1980. 730 p.

35. Kuzin L.T. *Raschet i proektirovanie diskretnyh sistem upravleniya* [Calculation and design of discrete control systems]. Moscow. Mashgiz Publ., 1962. 684 p. (in Russian).

36. Bykov V.V. *Cifrovoe modelirovanie v statisticheskoy radiotehnike* [Numerical simulation in statistical radio engineering]. Moscow. Sovetskoe radio Publ., 1971. 328 p. (in Russian).

37. Yuferov A.G. Quadrature formulas of the sliding integration. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma «Voprosy optimizatsii vychisleniy* (VOV-XXXIII)» [Proceedings of the International Symposium «Problems of optimization calculations (POC-XXXIII)»]. Kiev. Institut kibernetiki im. V.M. Glushkova NAN Ukrainy Publ., 2007, pp. 319-320 (in Russian).

Author

Yuferov Anatoliy Gennadyevich, Head of Laboratory, Cand. Sci. (Phys.-Math.)
E-mail: anatoliy.yuferov@mail.ru