

## НОДАЛЬНЫЙ $S_N$ -МЕТОД В $HEX-Z$ -ГЕОМЕТРИИ

**В. П. Березнев**

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН.  
115191, г. Москва, ул. Большая Тульская, д. 52*



При решении нейтронно-физических задач с грубой пространственной сеткой, какими, в частности, являются расчеты РУ БР (например, БН-800 и БН-1200) с ячейкой в виде гексагональной прямоугольной призмы, моделирующие тепловыделяющие сборки реактора, проблема пространственной аппроксимации в  $S_N$ -приближении становится весьма актуальной.

Среди конечно-разностных схем для уравнения переноса нейтронов и гамма-квантов наиболее широкое применение нашли «взвешенные алмазные» ( $WDD$ ) схемы. Они эффективны с точки зрения простоты реализации и вычислительных затрат. Однако в задачах, обозначенных выше, проявляются их недостатки. Алмазная схема ( $DD$ ), имея второй порядок аппроксимации (наилучший для данного семейства схем), не обладает свойствами положительности и монотонности. В силу этого обстоятельство, в решении зачастую присутствуют отрицательные значения или нефизические осцилляции. Шаговая схема ( $St$ ), лишенная недостатков алмазной схемы, обладает лишь первым порядком точности. В связи с потребностью в высокоточных расчетах ее использование видится неэффективным.

Существуют алгоритмы коррекции отрицательных значений, а также адаптивные ( $AWDD$ ) схемы, нацеленные как на уменьшение уровня осцилляций, так и на получение положительного решения. Однако эти алгоритмы негативно сказываются на порядке аппроксимации, и в таких случаях говорят о схемах первого – второго порядка точности. К тому же для адаптивных схем существует проблема выбора параметров схемы.

Очевидным выходом из ситуации с повышением качества и точности расчета является измельчение сетки. В случае РУ БР пространственная сетка представляет собой набор прямых призм с правильным шестиугольником в основании (в таком случае говорят о  $HEX-Z$ -геометрии). Поэтому гексагональные ячейки можно разбить на ромбовидные (три ромба на один шестиугольник; 12 ромбов на один шестиугольник и т.д.). Для полученной сетки из ромбов используется алмазная схема. В силу меньшего, по сравнению с исходным, размера ячейки недостатки схемы проявляться не будут. Также может быть использована треугольная сетка.

Другой подход в решении обозначенной проблемы – разработка методов повышенного порядка точности без увеличения числа расчетных точек. Одним из таких методов является нодальный. В основе любого нодального метода лежит разложение неизвестной функции внутри нода (элементарного объема с неизменными свойствами) по базисным функциям с последующим вычислением моментов разложения.

В данной статье речь пойдет о нодальном  $S_N$ -методе в  $HEX-Z$ -геометрии.

**Ключевые слова:** реактор на быстрых нейтронах, нейтронно-физический расчет, нодальный метод,  $S_N$ -приближение, гексагональная геометрия.

### НОДАЛЬНЫЙ $S_N$ -МЕТОД

Рассмотрим стационарный процесс переноса нейтронов, описываемый линейным уравнением Больцмана. После дискретизации по угловой и энергетической перемен- ной имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_m \cdot \nabla \phi_m^g(x, y, z) + \Sigma_t^g(x, y, z) \phi_m^g(x, y, z) = \\ = \sum_{g'} \left( \Sigma_s^{g' \rightarrow g} + \frac{\chi^g}{K_{eff}} \nu \Sigma_f^{g'} \right) \sum_m w_m \phi_m^g(x, y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\phi_m^g(x, y, z)$  – плотность потока нейтронов в точке  $(x, y, z)$  в направлении  $\mathbf{\Omega}_m$  в группе  $g$ ;  $\Sigma_t^g(x, y, z)$  – полное макроскопическое сечение взаимодействия;  $\Sigma_s^{g' \rightarrow g}$  – макроскопическое сечение рассеяния из группы  $g'$  в группу  $g$ ;  $\chi^g$  – спектр нейтрон- ных деления;  $K_{eff}$  – эффективный коэффициент размножения нейтронов;  $\nu \Sigma_f^{g'}$  – чис- ло нейтронов деления, возникших при одном акте деления;  $w_m$  – вес угловой квад- ратуры. Далее индексы  $g$  и  $m$ , по возможности, будем опускать.

Рассмотрим расчетную ячейку с «размером под ключ»  $\Delta x$  и высотой  $\Delta z_k$ , как изобра- жено на рис. 1, которая моделирует одну из высотных частей ТВС активной зоны РУ БР:

$$D = \left\{ \left[ -\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2} \right] \times [-y_b(x), y_b(x)] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}] \right\},$$

$$y_b(x) = \frac{\Delta x - |x|}{\sqrt{3}}.$$

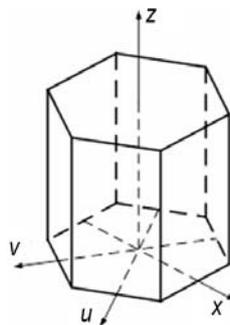


Рис. 1. Расчетная ячейка в HEX-Z-геометрии

Выберем для определенности угловое направление  $\mathbf{\Omega}_m > 0$ . Интегрирование урав- нения (1) по переменным  $y$  и  $z$  в пределах ячейки приводит к одномерному уравнению

$$\frac{d}{dx} y_b(x) \Phi(x) + \Sigma_t y_b(x) \Phi(x) = y_b(x) Q(x) - L(x) \quad (2)$$

относительно одномерного потока  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2y_b(x) \Delta z_k} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} dz \int_{-y_b(x)}^{y_b(x)} \phi_m^g(x, y, z) dy.$$

В уравнении (2)  $L(x)$  – утечка нейтронов, имеющая радиальную  $L_r(x)$  и аксиальную  $L_z(x)$  составляющие [1]:

$$L(x) = L_r(x) + y_b(x) L_z(x),$$

$$L_r(x) = \begin{cases} \frac{\mu_u \Phi_{u+}(x) - \mu_v \Phi_{v+}(x)}{\sqrt{3}}, & x > 0 \\ \frac{\mu_v \Phi_{v+}(x) - \mu_u \Phi_{u-}(x)}{\sqrt{3}}, & x < 0 \end{cases};$$

$$L_z(x) = \xi[\Phi_{z+}(x) - \Phi_{z-}(x)] / \Delta z_k.$$

С учетом граничного условия  $\Phi(-\Delta x/2) = \Phi_{in}^x$  имеем решение для уравнения (2):

$$y_b(x)\Phi(x) = \frac{\Delta x}{2\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\Sigma_t}{\mu_x}\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right)\right\} \Phi_{in}^x + \frac{1}{\mu_x} \int_{-\Delta x/2}^x [y_b(t)Q(t) - L(t)] \exp\left\{-\frac{\Sigma_t}{\mu_x}(x-t)\right\} dt. \quad (3)$$

Используем разложение потока нейтронов и источника по базисным полиномам:

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^I \Phi_i^x h_i(x), \quad Q(x) = \sum_{i=0}^I Q_i^x h_i(x),$$

$$h(x) = \left\{1, x, x^2 - \frac{5}{72}, \dots\right\}; \quad \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} y_b(x) h_i(x) h_j(x) dx = \delta_{ij} D_i^x. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (3) позволяет получить выражения для моментов разложения, а подстановка  $x = \Delta x/2$  в (3) – выражение для потока  $\Phi_{out}^x$  на выходящей грани.

Аналогичным образом получаются выражения для функций  $\Phi(u)$  и  $\Phi(v)$ , где переменные  $u$  и  $v$  соответствуют осям координат, изображенным на рис. 1.

При повороте системы координат на угол  $\alpha$  уравнение переноса в новых координатах  $(x', y', z)$  сводится к виду

$$\left(\mu' \frac{\partial}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \xi \frac{\partial}{\partial z} + \Sigma_t\right) \varphi(x', y', z) = Q(x', y', z),$$

т.е. к уравнению (1) с новыми направляющими косинусами

$$\mu' = \mu \cos \alpha + \eta \sin \alpha,$$

$$\eta' = -\mu \sin \alpha + \eta \cos \alpha.$$

Таким образом, достаточно провести замену  $(\mu, \eta) \rightarrow (\mu', \eta')$  в выражениях (3) и (4) для  $\alpha_u = \pi/3$  и  $\alpha_v = 2\pi/3$ .

Для переменной  $z$  имеем

$$\frac{\xi}{\Delta z} \frac{d}{dz} \Phi(z) + \Sigma_t \Phi(z) = Q(z) - L(z), \quad (5)$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{3}\Delta x^2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx \int_{-y_b(x)}^{y_b(x)} \varphi_m^g(x, y, z) dy,$$

$$L(z) = \frac{2}{3\Delta x} \sum_{\alpha=\{x,u,v\}} \mu_\alpha [\Phi_{\alpha+}(z) - \Phi_{\alpha-}(z)],$$

$$\Phi(z) = \sum_{i=0}^I \Phi_i^z f_i(z), \quad Q(z) = \sum_{i=0}^I Q_i^z f_i(z), \quad (6)$$

$$f(z) = \left\{ 1, z, z^2 - \frac{1}{12}, \dots \right\} : \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} f_i(z) f_j(z) dz = \delta_{ij} D_i^z.$$

В итоге получаем систему линейных уравнений для потока нейтронов на выходящих гранях

$$\Phi_{out}^\alpha = a_0^\alpha \Phi_{in}^\alpha + \sum_{j=0}^I b_{0j}^\alpha L_j^\alpha + c_{00}^\alpha Q_{cp} + \sum_{j=1}^I c_{0j}^\alpha Q_j^\alpha, \quad \alpha = \{x, u, v, z\}, \quad (7)$$

в которой  $a_0^\alpha, b_{0j}^\alpha, c_{0j}^\alpha$  – нодальные коэффициенты и учтено равенство

$$Q_0^\alpha = Q_{cp},$$

где  $Q_{cp}$  – среднее значение источника нейтронов в расчетной ячейке.

Решение этой системы

$$\tilde{\Phi}_{out} = (\tilde{\Phi}_{out}^x, \tilde{\Phi}_{out}^u, \tilde{\Phi}_{out}^v, \tilde{\Phi}_{out}^z)^T.$$

В данном случае может быть применен наиболее простой алгоритм коррекции отрицательных значений

$$\Phi_{out}^\alpha = \max(0, \tilde{\Phi}_{out}^\alpha),$$

поскольку для вычисления потоков на выходящих гранях не используется балансное уравнение, и баланс нейтронов будет соблюден на этапе вычисления среднего потока  $\Phi_{cp}$  в расчетной ячейке:

$$\frac{2}{3\Delta x} \sum_{\alpha=\{x,u,v\}} |\mu_\alpha| (\Phi_{out}^\alpha - \Phi_{in}^\alpha) + \frac{\xi}{\Delta z_k} (\Phi_{out}^z - \Phi_{in}^z) + \Sigma_t \Phi_{cp} = Q_{cp}. \quad (8)$$

Моменты разложения одномерных потоков вычисляются согласно выражениям

$$\Phi_i^\alpha = a_i^\alpha \Phi_{in}^\alpha + \sum_{j=0}^I b_{ij}^\alpha L_j^\alpha + c_{i0}^\alpha Q_{cp} + \sum_{j=1}^I c_{ij}^\alpha Q_j^\alpha, \quad (9)$$

$$\alpha = \{x, u, v, z\}, \quad i = 1, \dots, I.$$

Нулевые моменты разложения вычислять не требуется, поскольку они совпадают со средним значением потока в ячейке:

$$\Phi_0^\alpha = \Phi_{cp}.$$

## РАСЧЕТ 2D- И 3D-МОДЕЛИ РЕАКТОРА КНК-II

Для тестирования выбрана модель реактора КНК-II (модель №4 из [2]). Это четырехгрупповая условно-критическая задача. Двумерная модель, соответствующая центральному высотному слою активной зоны, изображена на рис. 2. Общее количество сборок равно 169. Размер «под ключ» составляет 12.99 см.

Для двумерной задачи проведены две серии расчетов (табл. 1), соответствующих наличию ( $CR_{in}$ ) и отсутствию ( $CR_{out}$ ) стержней СУЗ в активной зоне. Точность

сходимости по  $K_{eff}$  составляла  $10^{-6}$ . В качестве эталонного результата выбран расчет по программе TWOHEX-96Δ [3].

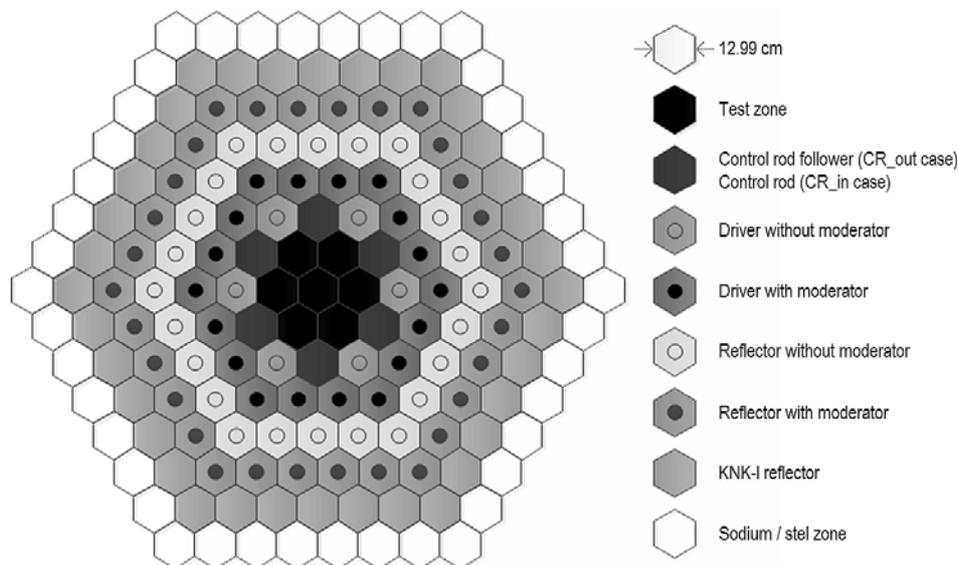


Рис. 2. Картограмма модели активной зоны реактора KNK-II [2]

Таблица 1

**Результаты расчета  $K_{eff}$  для двумерной модели**

Расчетный код (число расчетных точек)	$CR_{in}$		$CR_{out}$	
	$K_{eff}$	$\Delta K/K \%$	$K_{eff}$	$\Delta K/K \%$
МОСМ (90804) [3]	1.00931	- 0.01	1.30866	- 0.06
SPANDOM (169) [4]	1.01055	0.11	1.30833	- 0.09
Алмазная схема (169)	0.99691	- 1.25	1.30620	- 0.25
Нодальная схема (169)	1.01009	0.07	1.30998	0.04
TWOHEX-96Δ (16224)	1.00941	-	1.30945	-

Результаты по нодальному методу находятся в хорошем согласии с результатами, полученными по другим программам.

Также проведены расчеты для трехмерной модели, которая имеет 50 высотных слоев. В этом случае добавляется состояние ( $CR_{half}$ ), в котором стержни частично погружены в активную зону. В качестве эталонного выбран расчет на основе метода Монте-Карло и программы GMVP [2].

Таблица 2

**Результаты расчета  $K_{eff}$  для трехмерной модели**

Расчетный код	$CR_{out}$		$CR_{in}$		$CR_{half}$	
	$K_{eff}$	$\Delta K/K \%$	$K_{eff}$	$\Delta K/K \%$	$K_{eff}$	$\Delta K/K \%$
HEXNOD [2]	1.0889	- 0.61	0.8748	- 0.62	0.9783	- 0.57
Алмазная схема	1.0911	- 0.4	0.8660	- 1.6	0.9754	- 0.87
Нодальная схема	1.0992	+0.34	0.8823	+0.24	0.9876	+0.37
GMVP	1.0955	-	0.8802	-	0.9839	-

Как видно из табл. 2, нодальная схема превосходит по точности алмазную, особенно при наличии гетерогенности.

Радиальное распределение поля нейтронов, изображенное на рис. 3, демонстрирует, что нодальная схема дает решение без осцилляций.

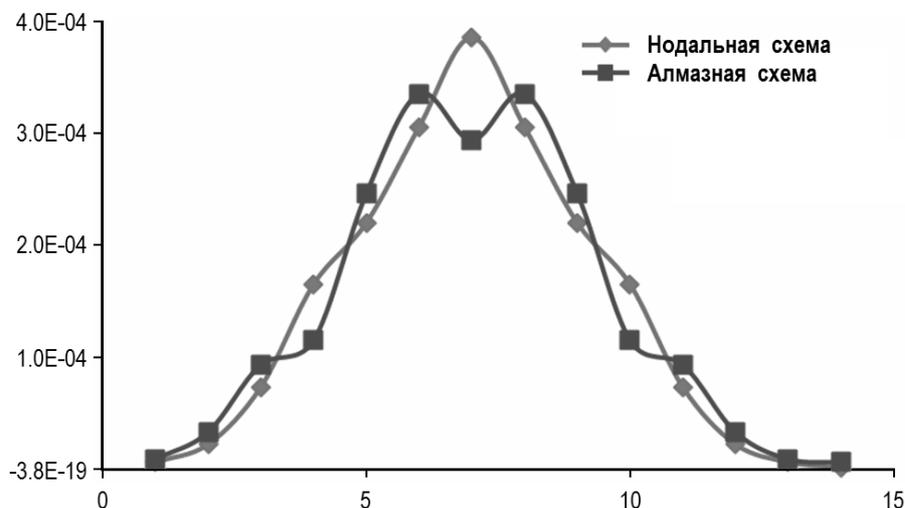


Рис. 3. Радиальное распределение поля нейтронов в KNK-II-модели

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан и реализован нодальный  $S_N$ -метод для нейтронно-физических расчетов. Проведенный расчет 2D- и 3D-модели KNK-II реактора демонстрирует повышенный порядок точности и качественно правильное распределение поля нейтронов при использовании нодального  $S_N$ -метода.

### Литература

1. Ikeda H., Takeda T. A new nodal SN transport method for three-dimensional hexagonal geometry. Journal of Nuclear Science and Technology. 1994, v. 31, pp. 497-509.
2. Ikeda H., Takeda T. 3-D Neutron Transport Benchmarks. Department of Nuclear Engineering Osaka University, Japan, NEACRP L-330, 1991.
3. Yang X., Satvat N. MOCUM: A two-dimensional method of characteristics code based on constructive solid geometry and unstructured meshing for general geometries. Annals of Nuclear Energy. 2012, v. 46, pp. 20-28.
4. Tae Hyeong, Nam Zin Source projection analytic nodal SN method for hexagonal geometry. Annals of Nuclear Energy. 1996, v. 23, pp. 133-143.

Поступила в редакцию 05.07.2015 г.

### Автор

Березнев Валерий Павлович, инженер  
E-mail: bvp@ibrae.ac.ru

UDC 621.039

### NODAL $S_N$ -METHOD FOR HEX-Z-GEOMETRY

Bereznev V.P.

Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences.  
52, B.Tulskaya st., Moscow 115191, Russia

### ABSTRACT

The problem of spatial approximation for the neutron transport equation becomes very important in solving neutronics problems with coarse spatial grid, like fuel

assemblies calculations of fast reactors (for example, BN-800 and BN-1200).

«Weighted diamond» (WDD) schemes are the most widely adopted among the finite difference schemes for the neutrons and gamma rays transport equation. They are effective in terms of ease of implementation and computational costs. However, the problems mentioned above indicate their limitations. Diamond difference scheme (DD) has a second-order approximation (best for this type of schemes) and does not have the properties of positive and monotony. For this reason, a negative values or nonphysical oscillations appear in the solution. Step scheme (St) is monotonic and positive unlike DD, but is has only first-order accuracy. So it is inefficient for high-precision calculations.

There are negative correction algorithms and adaptive (AWDD) schemes for reducing the level of oscillation and obtaining a positive solution. However, these algorithms have a negative impact on the order of approximation, and in such cases we can obtain schemes with only 1– 2 accuracy order. In addition to adaptive schemes there is a problem of choosing the scheme's parameters.

The obvious way out to improve the quality and accuracy of the calculation is a refinement of the grid. In the case of fast reactors spatial grid is a set of rectangular prisms with a regular hexagon at the base (HEX-Z geometry). Therefore hexagonal cells are divided into rhomboid (3 rhombus for 1 hexagon; 12 rhombus for 1 hexagon, etc.). Next we can use diamond difference scheme on a grid of rhombuses. Defects will not occur due to small cell size compared to the initial hexagonal cell. It can also be used triangular mesh.

Another approach to solving the identified problem is the development of higher order accuracy methods without the increasing number of calculation points. One of these methods is the nodal method. The basis of every nodal method is the expansion of the unknown function in the node (elementary volume with the same properties) using basic functions with subsequent calculation of expansion moments.

In this article, we will focus on  $S_N$  nodal method in HEX-Z-geometry.

**Key words:** fast reactor, neutronics calculations, nodal method,  $S_N$ -approximation, hexagonal geometry.

#### REFERENCES

1. Ikeda H., Takeda T. A new nodal SN transport method for three-dimensional hexagonal geometry. *Journal of Nuclear Science and Technology*. 1994, v. 31, pp. 497-509.
2. Ikeda H., Takeda T., 3-D Neutron Transport Benchmarks. Department of Nuclear Engineering Osaka University, Japan, NEACRPL-330, 1991.
3. Yang X., Satvat N. MOCUM: A two-dimensional method of characteristics code based on constructive solid geometry and unstructured meshing for general geometries. *Annals of Nuclear Energy*. 2012, v. 46, pp. 20-28, 2012.
4. Tae Hyeong, Nam Zin Source projection analytic nodal SN method for hexagonal geometry. *Annals of Nuclear Energy*. 1996, v. 23, pp. 133-143.

#### Author

Bereznev Valerij Pavlovich, Engineer  
E-mail: [bvp@ibrae.ac.ru](mailto:bvp@ibrae.ac.ru)